RHEIN.-WESTF.TECHN.HOCHSCHULE AACHEN
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Heinz Hanßmann

Aachen, den 25.5.2007

7. Übungsblatt zur Vorlesung Hamiltonsche Dynamische Systeme

17. Untersuchen Sie die Bahn im ebenen Zentralkraftfeld für den Fall, daß die Gesamtenergie gleich dem Wert der effektiven potentiellen Energie im Punkt eines lokalen Maximums ist.

18. Ist $H \in C^\infty(M)$ eine Hamiltonfunktion und $\beta : M \to]0, \infty[$ glatt, so definiere eine weitere Hamiltonfunktion $K \in C^\infty(M)$ vermöge $K(p) := \beta(p) \cdot (H(p) - h) \;\; \forall_{p \in M}$. Zeigen Sie, daß die Trajektorien von X_K auf $K^{-1}(0)$ aus den Trajektorien von X_H auf $H^{-1}(h)$ durch die orientierungserhaltende Reparametrisierung $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{\beta}$ der Zeit hervorgehen.

19. Das Keplerproblem auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^2$ (mit kanonischer Poissonstruktur) ist durch die Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

definiert.

a) Wenden Sie auf dem Energieniveau $\{H = -\frac{1}{2\lambda^2}\}$ die Koordinatentransformation $(q, p) \mapsto (x, y)$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda}{2}(q_1^2 - q_2^2) \, , & y_1 &= \frac{\lambda}{4} \, \frac{q_1 p_1 - q_2 p_2}{q_1^2 + q_2^2} \, , \\ x_2 &= \lambda \, q_1 q_2 \, , & y_2 &= \frac{\lambda}{4} \, \frac{q_1 p_2 + q_2 p_1}{q_1^2 + q_2^2} \end{aligned}$$

zusammen mit der Zeitskalierung $\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dt}} = \dfrac{1}{2\lambda\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$ an. Zeigen Sie, daß dies die Singularität im Ursprung regularisiert.

b) Berechnen Sie die Transformierten der ersten Integrale

$$\tau_1 := \frac{\pi_4 y_2 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{\sqrt{-2H}} \, , \quad \tau_2 := \frac{-\pi_4 y_1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{\sqrt{-2H}} \, , \quad \tau_3 := \pi_4 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \, , \quad \tau_4 := \frac{1}{\sqrt{-2H}}$$

und folgern Sie, daß alle ersten Integrale Funktionen der τ_i sind.