Tentamen analyse A op 19 april 2012

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Jaap Eldering, Jan van Zweeden, Sietske Tacoma of Ori Yudilevich).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. [**20**] Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in 2 met $f'(2) < 0$. Bewijs dat er $x > 2$ en $y < 2$ zijn met $f(x) < f(y)$.

2. [**30**] Definieer $f(x,y) = \dfrac{x^2 y\, \mathrm{e}^{x^2 y}}{x^2 - y^2}$ op het maximaal mogelijke domein.

   (i) Ga na dat $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0$ en $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0$.

   (ii) Bereken $\lim\limits_{x \to 0} f(x,2x)$ en $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x^2)$.

   (iii) Bewijs dat $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x + \lambda x^2) = \dfrac{-1}{2\lambda}$ voor alle $\lambda > 0$.

   (iv) Bewijs dat de limiet $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ niet bestaat.

3. [**20**] Zij $\tau > 2$ vast en $\gamma > 0$ vast. Beschouw voor gegeven $k \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ de ongelijkheid

$$|k_1 x_1 + k_2 x_2| \;\geq\; \frac{\gamma}{\|k\|^\tau}\;. \tag{1}$$

   (i) Laat zien dat voor $k \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ de functie $f_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeven door $f_k(x) = |k_1 x_1 + k_2 x_2| - \frac{\gamma}{\|k\|^\tau}$ continu is.

(ii) Bewijs dat de verzameling $D_k = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ voldoet aan (1)}\}$ gesloten is.

(iii) We noemen $x \in \mathbb{R}^2$ Diofantisch als voor alle $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ aan de ongelijkheid (1) is voldaan. Bewijs dat de verzameling $D \subseteq \mathbb{R}^2$ van alle Diofantische punten gesloten is.

Terzijde: de 'meeste' $x \in \mathbb{R}^2$ zijn Diofantisch, in het bijzonder hebben we het hier niet over de lege verzameling.

4. **[30]** Zij B de verzameling van alle begrensde functies $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, d.w.z. $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ is naar onderen en boven begrensd, en definieer

$$\begin{array}{rccl} \|..\| : & B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \end{array} .$$

Omdat de (puntsgewijze) som van begrensde functies begrensd is en een veelvoud van een begrensde functie begrensd is, is B een vectorruimte (lineaire ruimte) met in de oorsprong de nul-functie $0(x) \equiv 0$.

(i) Ga na dat $\|..\|$ een norm op B is. *Hint:* bewijs eerst dat

$$\operatorname{bov}\{\, \lambda a \mid a \in A \,\} \quad = \quad \{\, \lambda b \;\mid\; b \in \operatorname{bov} A \,\}$$

voor alle $A \subseteq \mathbb{R}$ en $\lambda \geq 0$ (je mag dit ook dan gebruiken als je het niet kunt bewijzen).

(ii) Concludeer dat $\mathrm{d}(f,g) := \|f - g\|$ een metriek op B definieert en beschrijf wanneer een functie $f \in B$ een element van de ε–bol $B(0;\varepsilon)$ rond de nul-functie is.

(iii) Zij $f_k(x) = \dfrac{1}{k}\sin(kx)$ voor $k \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$. Bewijs dat $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = 0$ ten opzichte van de metriek d.

(*bonus*) Is het rijtje $(f_k')_k$ van afgeleiden van de f_k eveneens convergent ten opzichte van de metriek d ?