Inleiding Analyse 2010

Extra opgaven

Opgave A

Laat zien dat $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ln(1-\varepsilon) = 0$.

Opgave B

Voor $a \in \operatorname{Dom}(f)$ en $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ concludeer dat $b = f(a)$.

Opgave C

Gegeven twee functies $f, g : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ met $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ en $|g(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in \operatorname{Dom}(g)$. Laat zien dat $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

Opgave D

Definieer de functie $f(x) = |x|^3 \cos \frac{1}{x}$ op het maximaal mogelijke domein en laat zien dat $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Zet f voort tot heel $\mathbb{R}$ door middel van $f(0) := 0$ en ga na waar de zo gedefinieerde functie f differentieerbaar is.

Opgave E

Zij (W, d) een metrische ruimte en $V \subseteq W$, voorzien van de geïnduceerde metriek. Laat zien dat $A \subseteq V$ dan en slechts dan gesloten is 'in V' (dat wil zeggen A is gesloten in zijn eigenschap als deel van de metrische ruimte V, niet noodzakelijk ook gesloten in zijn eigenschap als deel van de metrische ruimte W) als er een gesloten deelverzameling $B \subseteq W$ bestaat met $A = B \cap V$.

Geef voorbeelden van in V gesloten verzamelingen A aan waarvoor A wél gesloten is in W en waarvoor A niet gesloten is in W. Kun je uit deze voorbeelden een vermoeden/stelling afleiden? Wat gebeurt er als je overal 'gesloten' door 'open' vervangt?

Opgave F

Zij $f : \mathbb{R}^p \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar en de gradient continu in $a \in \operatorname{Dom}(f)$ met $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Ga na dat er een kromme $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ bestaat met $f(c(t)) = t$ voor alle $t \in I$.

Opgave G

Toon aan dat een begrensde functie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dan en slechts dan Riemann-integreerbaar is, als voor elk rijtje $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van verdelingen met $\lim\limits_{n \to \infty} m(V_n) = 0$ voor de maas en elk rijtje $(\Xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van bijbehorende strooipunten de rij $(S(f, V_n, \Xi_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergent is.