Hertentamen inleiding analyse op 20 augustus 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en op het eerste vel ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Timo Kluck, Shan Shah, Jan van Zweeden of João Mestre).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Herinnering: een functie $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ is continu differentieerbaar indien f differentieerbaar is en bovendien de afgeleide functie f' continu is.
- *SUCCES!*

1. **[15]** Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een interval, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar met $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in I$ en F een primitieve van f. Toon aan dat
$$\int_a^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad xf^{-1}(x) \;-\; F(f^{-1}(x))\,\Big|_a^b$$
voor alle $a, b \in f(I)$.

2. **[10]** Zij $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continu. Toon aan dat f een dekpunt $p \in [0,1]$ heeft (d.w.z. $f(p) = p$).

3. **[30]** Zij $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^m$. Toon aan dat de limiet $\lim_{x \to a} f(x)$ dan en slechts dan bestaat, als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is met de eigenschap, dat voor alle $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ de implicatie
$$\mathrm{d}(x,a) < \delta \;\wedge\; \mathrm{d}(y,a) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \;<\; \varepsilon$$
geldt.

4. **[20]** Laat zien dat $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dan en slechts dan continu differentieerbaar is, als er voor elke $x \in \mathbb{R}$ een $\ell \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap, dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig is, dat voor alle $h, t \in B(0; \delta)$ geldt dat

$$|f(x+h) \; - \; f(x+t) \; - \; \ell \cdot (h-t)| \;\; \leq \;\; \varepsilon \cdot |h-t| \;\; .$$

5. **[15]** Zij $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar en $a \in \mathrm{Dom}(f)$ met $f'(a) \neq 0$. Laat zien dat er intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ en een differentieerbare functie $g : J \longrightarrow I$ bestaan met $g(f(x)) = x$ voor alle $x \in I$ en $f(g(y)) = y$ voor alle $y \in J$.

6. **[10]** Laat zien dat elke deelverzameling $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{R}$ minstens één randpunt heeft (d.w.z. een limietpunt dat geen inwendig punt van A is).