Tentamen inleiding analyse op 2 juli 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en op het eerste vel ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Timo Kluck, Shan Shah, Jan van Zweeden of João Mestre).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Alle (deel)opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Definieer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ door middel van

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin^2(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases} .$$

   (i) Bewijs dat f in elk punt $x \in \mathbb{R}$ differentieerbaar is.

   (ii) Bepaal de afgeleide f' en ga na of deze op heel $\mathbb{R}$ continu is.

   (iii) In welke punten $x \in \mathbb{R}$ is f twee keer differentieerbaar?

2. Zij $f : V \longrightarrow W$ een continue bijectieve afbeelding tussen metrische ruimten.

   (i) Veronderstel dat V rij-compact is. Ga na dat de beelden van gesloten verzamelingen onder f weer gesloten zijn.

   (ii) Veronderstel dat V rij-compact is. Laat zien dat f dan een homeomorfisme is, d.w.z. f^{-1} is ook continu.

   (iii) Geef een voorbeeld van een continue bijectieve afbeelding f tussen metrische ruimten die geen homeomorfisme is.

3. Zij $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 4xy$ voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (i) Bereken de stationaire punten van f.

   (ii) Bepaal $f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ en schets een plaatje.

   (iii) Waar heeft de functie lokale minima en/of maxima? Zijn deze globaal? Bewijs je beweringen.

4. Zij $C[0,1]$ de reële lineaire ruimte van continue functies $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Voor $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, definiëren we d.m.v.

$$\|f\|_p \;:=\; \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

een afbeelding $\|..\|_p : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die ook de p–de integraalnorm wordt genoemd.

   (i) Verifieer dat $\|..\|_p$ ten minste de eigenschappen

   (a) $\|f\|_p \geq 0$ voor alle $f \in C[0,1]$.

   (b) $\|f\|_p = 0$ dan en slechts dan als f de nulfunctie is.

   (c) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $f \in C[0,1]$.

   van een norm heeft.

   (ii) Zoals elke norm op een lineaire ruimte maakt de integraalnorm van $C[0,1]$ d.m.v. $\mathrm{d}(f,g) = \|f-g\|_p$ een metrische ruimte. Bereken voor $p = 1{,}5$ de hierdoor gedefinieerde afstand tussen de functies $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ en $g(x) = 4x^2$.

   (iii) Ga na dat

$$\langle f \mid g \rangle \;:=\; \int_0^1 f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \;.$$

   een inproduct op $C[0,1]$ definieert en verifieer dat $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$. Laat zien dat in ieder geval de 2–de integraalnorm voor alle $f, g \in C[0,1]$ aan de driehoeksongelijkheid

$$\|f + g\|_2 \;\leq\; \|f\|_2 + \|g\|_2$$

   voldoet. *Opmerking:* ook voor $p \neq 2$ voldoet de p–de integraalnorm aan de driehoeksongelijkheid, maar dat hoef je niet aan te tonen.

   (bonus) Bewijs de afschatting $\|f\|_{p+1}^{p+1} \leq \|f\|_2 \|f\|_{2p}^{p}$ voor alle $f \in C[0,1]$. *Hint:* gebruik de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz.