Inleiding Analyse 2009

Inleveropgaven

A). Stel

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

In $(0,0)$ is f niet gedefinieerd. We bestuderen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

1. Bepaal de waarde van $f(x,y)$ op een willekeurige rechte lijn door $(0,0)$. Bepaal de limiet van $f(x,y)$ als (x,y) langs die rechte lijn naar $(0,0)$ nadert. N.B. Je moet alle mogelijke rechte lijnen door (0,0) onderzoeken.
2. Bepaal nu het gedrag van $f(x,y)$ op de kromme $x = y^2$ in de buurt van $(0,0)$.
3. Bewijs dat niet geldt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Hiervoor kun je bijvoorbeeld een geschikte negatie van de limietdefinitie opstellen en laten zien dat f aan deze negatie voldoet.
4. Bewijs dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ niet bestaat. Is dit resultaat verrassend? Waarom wel of waarom niet? Plot eventueel de grafiek van de functie met Mathematica.

B). Stel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zijn functies. We definiëren voor alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$k(x) = \max\,\{f(x), g(x)\}$, d.w.z. het maximum van $f(x)$ en $g(x)$

$h(x) = \min\,\{f(x), g(x)\}$, d.w.z. het minimum van $f(x)$ en $g(x)$.

Met $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat bedoelen we: er is een $p \in \mathbb{R}$ zodat $\lim_{x\to a} f(x) = p$.

a. Bewijs: als $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat ook, dan bestaan $\lim_{x\to a} h(x)$ en $\lim_{x\to a} k(x)$. Hint: onderscheid eventueel verschillende gevallen.

b. Geldt het omgekeerde ook? Dat wil zeggen: als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten zijn ongelijk, volgt dan dat $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat? Zo ja, geef een bewijs, en zo nee, geef een tegenvoorbeeld. Laat in dit geval precies zien waarom je tegenvoorbeeld niet aan de limietdefinitie voldoet.

c. Als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten gelijk zijn aan elkaar, onderzoek dan ook of $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat. Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

C). Stel a, b, c, d zijn reële getallen met $a < b$ en $c < d$. Stel $f : [a,b] \to [c,d]$ is een reële functie die monotoon stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) \leq f(y)$) en surjectief ($f([a,b]) = [c,d]$).

(i) Bewijs $f(a) = c$ en $f(b) = d$.

(ii) Bewijs dat f continu is.

Opmerking: later zullen we bewijzen dat uit (i) en (ii) volgt dat f surjectief is.

Veronderstel nu dat f ook monotoon strikt stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) < f(y)$).

(iii) Laat zien dat de inverse functie f^{-1} bestaat en continu is op $[c, d]$.

(iv) Veronderstel dat de functie f: [0,1] $\to$ [0,1] gegeven door $f(x) = x^n$ surjectief is. [We zullen later uit eigenschappen van de reële getallen bewijzen dat dit zo is.]

Laat zien dat de wortelfunctie $x \to \sqrt[n]{x}$ continu is op [0,1].

D). We schrijven $[x]$ voor het grootste gehele getal dat $\leq x$ is. Definieer voor $x > 0$ $f(x) = 1 - x[\frac{1}{x}]$ en $g(x) = x - x^2[\frac{1}{x}]$, en $f(0) = g(0) = 0$.

(a) Bewijs dat $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ niet bestaat.

(b) Ga na of f continu is in 0. Bewijs je bewering.

(c) Ga na waar g differentieerbaar is. Bewijs je bewering. [Hint: onderscheid $x = 0, x = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ en de overige x.]

E). We definieren als in opgave 2.5 de maximumnorm $\|x\|_m := \max(|x_1|, |x_2|)$ op $\mathbb{R}^2$ en we kiezen ook een willekeurige norm $\|\cdot\|_w$ op $\mathbb{R}^2$. Hiervan veronderstellen we alleen de eigenschappen in lemma 1.3 in het dictaat.

(a) Kies $x = (x_1, x_2)$ willekeurig in $\mathbb{R}^2$, en toon aan dat er een constante $q > 0$ bestaat zodat $\|x\|_w \leq q\|x\|_m$. Hint: schrijf $x = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$.

De bij $\|\cdot\|_i$ behorende afstand noteren we met d_i, en de door de metriek d_i gedefinieerde bol met middelpunt $a \in \mathbb{R}^2$ en straal $r > 0$ noteren we met $B_i(a; r)$, voor $i = w$ en $i = m$.

(b) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\epsilon > 0$ de bol $B_w(a; \epsilon)$ open is ten aanzien van de metriek d_m.

(c) Bewijs dat voor elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ geldt: als A open is in d_w, dan is A open in d_m (en dus ook in de Euclidische metriek volgens opgave 2.5).

(d) Kun je voor $\mathbb{R}^n$ iets soortgelijks bewijzen, en zo ja, hoe?

F). We noteren met $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \;\; x \geq 0\}$. We kiezen een element ω dat niet in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zit en we definiëren $V = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\omega\}$. We gaan V van een metriek voorzien.

(a) Definieer $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $0 \leq f(x) < 1$ en $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Maak een plaatje van de grafiek van f (Hint: $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$). We breiden f uit tot een functie $V \to \mathbb{R}$ door te definiëren $f(\omega) = 1$.

(b) Nu definiëren we voor $x, y \in V \quad d_2(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Laat zien dat d_2 een metriek is op V.

(c) Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $d_2(x, y) \leq |x-y|$. Kies een vaste $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en laat $\delta > 0$ zodanig dat $\delta \leq 1$. Laat zien dat voor alle $x \in V$ met $|x-a| \leq \delta$ geldt $d_2(x, a) \geq \frac{1}{(a+2)^2} \cdot |x-a|$.

(d) We definieren nu de functie $g : V \to V$ door $g(0) = \omega$, $g(\omega) = 0$, en $g(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $x > 0$. Laat zien dat voor $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $a > 0$ geldt $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ ook ten opzichte van de metriek d_2!

(e) Bewijs dat g continu is op V met metriek d_2.

G). Stel $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ is een continue functie met de volgende eigenschappen:

(1) f is strikt monotoon stijgend,

(2) Er is een $x_0 > 0$ zodat $f(x_0) = x_0$,

(3) Voor alle x met $0 \leq x < x_0$ geldt $f(x) > x$,

(4) Voor alle x met $x > x_0$ geldt $f(x) < x$.

Kies nu $c \geq 0$. We definieren de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ door $a_1 = c$ en $a_{n+1} = f(a_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel eerst $c < x_0$.

(i) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ strikt monotoon stijgend is.

(ii) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ begrensd is.

(iii) Laat zien dat $\lim_{n \to \infty} a_n$ bestaat, en bepaal deze limiet.

(iv) Behandel nu het geval $c \geq x_0$.

(v) Ga na in hoeverre som 3.3, 3.5 (en eventueel 3.6) met opgave G behandeld kunnen worden. Bedenk nu zelf een som zoals 3.3, 3.5 of 3.6, waarbij van $(a_n)_{n \geq 1}$ de relatie tussen a_n en a_{n+1} concreet gegeven is.

H). Zij V een metrische ruimte. We noemen V samenhangend indien $\emptyset$ en V de enige deelverzamelingen van V zijn die tegelijk open en gesloten zijn.

(i) Laat zien dat V dan en slechts dan onsamenhangend (d.w.z. niet samenhangend) is als $V = O \dot{\cup} U$ disjuncte vereniging van twee niet lege open verzamelingen $O, U \subseteq V$ is.

(ii) Zij V samenhangend en $f : V \longrightarrow W$ continu. Ga na dat $f(V) \subseteq W$ dan eveneens samenhangend is; een deelverzameling van een metrische ruimte is samenhangend indien deze als metrische ruimte (voorzien met de geïnduceerde metriek) een samenhangende metrische ruimte is.

Voor $a < b \in \mathbb{R}$ heet een continue afbeelding $c : [a, b] \longrightarrow V$ een kromme in V, met beginpunt $c(a)$ en eindpunt $c(b)$. We noemen V boogsamenhangend indien er voor ieder tweetal punten $p, q \in V$ een kromme in V bestaat met beginpunt p en eindpunt q.

(iii) Toon aan dat elke boogsamenhangende metrische ruimte samenhangend is.

(iv) Geldt ook andersom dat elke samenhangende metrische ruimte boogsamenhangend is?

(v) Laat zien dat elke samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}$ boogsamenhangend is.

I). Zij D een rij-compacte metrische ruimte. Laat zien dat er voor elke $\varepsilon > 0$ eindig veel punten $x_1, \ldots, x_n \in D$ zijn met

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k; \varepsilon) \ .$$

Een metrische ruimte met deze eigenschap noemt men pre-compact (in het engels ook *totally bounded*, een sterke vorm van begrensdheid). Toon aan dat (omgekeerd) elke metrische ruimte die volledig en pre-compact is ook rij-compact is. Concludeer dat in een volledige metrische ruimte V een deelverzameling $A \subseteq V$ rij-compact is dan en slechts dan als A gesloten en pre-compact.

J). Zij $f : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ een strikt monotone functie.

(i) Laat zien dat f inverteerbaar is. *Opmerking:* dit werd al eerder in een inleveropgave gevraagd, hier zal bij de correctie rekening mee worden gehouden.

(ii) Wat kun je over $f(\mathrm{Dom}(f))$ zeggen? Beschrijf i.h.b. het geval dat $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ een interval is.

(iii) Toon aan dat $f^{-1} : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ continu is indien $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ een interval is en geef in het geval van onsamenhangend $\mathrm{Dom}(f)$ een tegenvoorbeeld. *Hint:* herlees de preciese definitie van continuïteit.

K). Deze opgave behandelt de vraag of een functie goed wordt benaderd door zijn Taylorpolynoom. We gebruiken de verkorte notatie $p_n(x)$ voor het n–de orde Taylorpolynoom van een functie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ rond het punt $a \in D$.

i) Zij $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ en $a = 0$. Gebruik lemma 6.38 om aan te tonen dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\sin x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} p_n(x) \ .$$

Een willekeurig vaak differentieerbare functie waarvoor $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(x)$ heet *reëel analytisch.* Niet alle functies die willekeurig vaak differentieerbaar zijn, zijn reëel analytisch. Zij $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \ .$$

ii) Gebruik inductie om te bewijzen dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ er een polynoom $r_n(y)$ bestaat zodat voor alle $x \neq 0$

$$g^{(n)}(x) \quad = \quad r_n(\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

(waarin $y = \frac{1}{x}$ een voor de hand liggende substitutie is). Laat zien dat $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

iii) Gebruik inductie om te bewijzen dat $g(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $g^{(n)}(0) = 0$. *Hint:* Gebruik de definitie

$$g^{(n+1)}(0) \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) \ - \ g^{(n)}(0)}{x \ - \ 0} \ ,$$

substitueer $y = \frac{1}{x}$ en gebruik herhaaldelijk de regel van l'Hôpital uit opgave 6.12.

iv) Toon aan dat g niet reëel analytisch is.