Tentamen Introductiecursus Wiskunde 6 december 2006

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek, aantekeningen en eenvoudige rekenmachines mogen gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Vind voor de differentiaalvergelijking

$$\dot{y} \;=\; (1+t^2)\sin(t)(1+y^2)$$

de oplossing $y(t)$ met $y(0)=0$ en de oplossing $y(t)$ met $y(0)=1$.

2. Gegeven de differentiaalvergelijking

$$\dot{y} \;=\; t^2 y \;+\; (t^2-1)\mathrm{e}^t \;,$$

bepaal de oplossingen $y(t)$ met $y(1)=0$ en met $y(0)=1$.

3. Vind de algemene oplossing voor de 2e orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} \;=\; 4\dot{y} \;+\; 5y \;.$$

4. Gegeven het systeem

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 2y_1 - y_2\\ \dot{y}_2 &= 4y_1 - y_1^3\end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen. Bepaal de evenwichtspunten en hun (stabiliteits)type.

5. Zij $V := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c\}$ de vectorruimte van alle polynomen van graad $\deg(f) \leq 2$.

   (a) Laat zien dat $U := \{f \in V \mid f(2) = 0\}$ een deelruimte van V is.

   (b) Controleer of de twee door $g(x) = x - 2$ en $h(x) = x^2 - 4x + 4$ gedefinieerde elementen $g, h \in V$ lineair onafhankelijk zijn.

   (c) Ga na dat U door g en h wordt voortgebracht.

   (d) Concludeer dat $\dim U = 2$ is.