Hertentamen modellen en simulatie 24 mei 2006

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Arthur van Dam of Arno Swart).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Diktaat en aantekeningen mogen gebruikt worden, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Beschouw de functie

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mu x(1-x^2) \end{array}$$

waarbij μ een parameter is die voldoet aan $\mu > 0$.

(*i*) Bereken voor willekeurige $\mu > 0$ het maximum van f op $[0,1]$. Hoe groot mag μ hoogstens zijn om $f(x) \in [0,1]$ te waarborgen?

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich volgens de recursie

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{voor alle } n \geq 0.$$

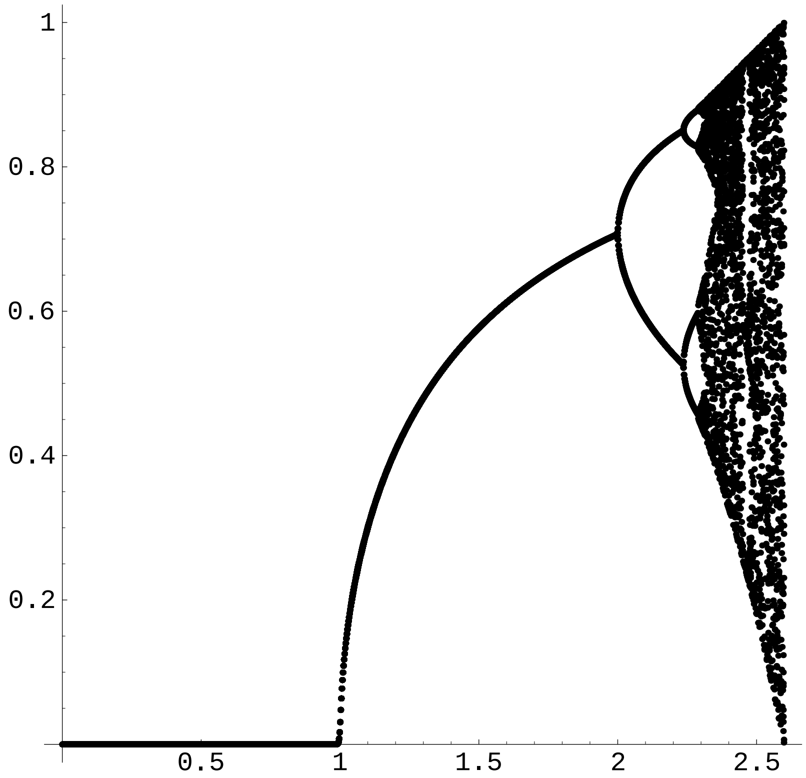
Hierbij staat x_n voor de (geschaalde) populatiegrootte op dag n.

(*ii*) Bepaal voor willekeurige $\mu > 0$ de dekpunten van deze recursie. Merk op dat alleen oplossingen in $[0,1]$ zinvol zijn. Voor welke waarden is dat het geval?

(*iii*) Ga voor elk van de dekpunten (uit onderdeel (*ii*)) na voor welke waarden van $\mu > 0$ dit dekpunt stabiel is.

(z.o.z.)

(*iv*) In de onderstaande schets van een bifurcatiediagram voor deze klasse van recursierelaties (bij een willekeurige maar vaste waarde van $x_0 = 0.2$) is het lange–termijngedrag van de oplossing x_n getekend als functie van μ. Laat in korte bewoordingen zien hoe je het antwoord op het vorige onderdeel kunt controleren aan de hand van de waarden van dit bifurcatiediagram in $\mu = 0.5; \mu = 1.5; \mu = 2.1$.



2. In deze opgave bestuderen we een parameterafhankelijk Markovketen met drie verschillende toestanden. De parameter $p \in \,]0,1[$ bepaalt de kans om vanuit toestand #1 naar toestand #2 te gaan, bovendien wordt uitgesloten dat men in toestand #1 blijft zitten. Vanuit toestand #2 is elk van de drie toestanden even waarschijnlijk en vanuit toestand #3 worden toestanden #1 en #2 elk met kans $\frac{1}{4}$ bereikt.

(z.o.z.)

(i) Stel een model op. Hoe bepaal je gegeven de overgangsmatrix P in het algemeen de overgang van toestand $\#i$ naar toestand $\#j$ over n stappen?

(ii) Geef de bijbehorende gerichte graaf. Is P aperiodiek? Heeft P een dominante eigenwaarde (en welke)?

(iii) Geef formules voor de eigenwaarden van P. *Hint: gebruik bekende relaties voor spoor en determinant van* P.

(iv) Als $p = \frac{1}{4}$ en de beginkansvector $s = (1, 0, 0)$, wat is dan de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} P^n \cdot s$?

3. Gegeven het parameterafhankelijke systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - xy \\ \dot{y} &= x^2 - y \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen, waarbij $\alpha > 0$.

(i) Bepaal de evenwichtspunten van dit systeem.

(ii) Geef de linearizering in de evenwichtspunten.

(iii) Bepaal voor ieder evenwichtspunt de stabiliteitstype(s), afhankelijk van de waarde van α.

(iv) Hoe verandert de situatie als we $\alpha < 0$ nemen?

4. Xander en Yvonne bepalen gemeenschappelijk een pyramide, en wel als volgt. Xander bepaalt de grootte van de pyramide en Yvonne mag de kleur kiezen. Afhankelijk van de zo verkregen pyramide betaalt Yvonne vervolgens een bedrag aan Xander, de waarden zijn: €6 voor de grote rode pyramide, €2 voor de kleine rode pyramide, €1 voor de grote gele pyramide, €5voor de kleine gele pyramide, €3 voor de grote blauwe pyramide en €4 voor de kleine blauwe pyramide.

(i) Formuleer dit als een matrixspel met een 2×3 matrix A.

(ii) Bepaal de waarde van het spel door een optimale strategie van Yvonne te berekenen. Herformuleer hiervoor haar minimalizeringsprobleem als een lineair programmeringsplobleem.

(iii) Bepaal een optimale strategie van Xander.