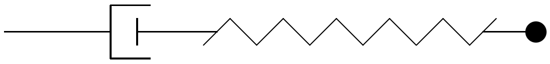
Hertentamen modellen en simulatie 29 mei 2007

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Tammo Jan Dijkema of Steven Wepster).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Diktaat en aantekeningen mogen gebruikt worden, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Het massa-veer-demper-systeem



woord door de 2de orde differentiaalvergelijking

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

gemodelleerd. Hierbij zijn de massa $m = \frac{1}{5}$ en de veerconstant $k = 25\pi$ vast, terwijl de demping c van de viscositeit van het in de demper gebruikte olie afhangt. We hebben 3 standaard soorten olie tot onze beschikking, leidend tot de drie waarden $6, 8$ en 10 van c.

Na een uitrekking $x(0) = 1$ wordt de massa los gelaten. We zijn erin geïnteresseerd dat het systeem zo snel mogelijk tot rust komt, d.w.z. $|x(t)| \leq 10^{-3}$ voor alle $t \geq \tau$ met $\tau > 0$ zo klein mogelijk. De beginsnelheid bij het los laten is $\dot{x}(0) = 0$.

(*i*) Welke soort olie zorgt voor de kleinste waarde van τ ?

(*ii*) De oliemaatschappij kan op aanvraag ook speciaal olie produceren. Hoe groot zou de resulterende waarde van c moeten zijn opdat τ minimaal wordt?

(*iii*) Je mag de massa bij het loslaten een stoot geven, d.w.z. de beginsnelheid $\dot{x}(0)$ zelf bepalen. Met welke standaard soort olie kun je τ nu zo klein mogelijk maken?

(z.o.z.)

2. Xander en Yvonne spelen een matrixspel met uitkomsten

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 2 & p-2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

waar $p \in [0,1]$ een nog nader te bepalen parameter is.

(i) Bepaal voor $p = 1$ de waarde van het spel door een optimale strategie van Xander te berekenen. Herformuleer hiervoor zijn minimalizeringsprobleem als een lineair programmeringsprobleem.

(ii) Bepaal voor $p = 0$ een optimale strategie van Yvonne.

(iii) Voor welke waarde van p is dit spel eerlijk (d.w.z. de waarde van het spel is 0) ?

3. In deze opgave bestuderen we een Markovketen met vier verschillende toestanden waarin nooit een toestand herhaald wordt. Vanuit toestand #1 worden de twee toestanden #2 en #4 met even grote kans bereikt, vanuit #2 de twee toestanden #3 en #4 met even grote kans en vanuit #3 de twee toestanden #1 en #4, met even grote kans. Vanuit toestand #4 is elk van de drie andere toestanden even waarschijnlijk.

(i) Stel een model op. Hoe bepaal je gegeven de overgangsmatrix P in het algemeen de overgang van toestand $\#i$ naar toestand $\#j$ over n stappen?

(ii) Geef de bijbehorende gerichte graaf. Is P aperiodiek? Heeft P een dominante eigenwaarde (en welke) ?

(iii) Bereken voor de beginkansvector $s = (0,0,0,1)$ de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} P^n \cdot s$.

4. Beschouw de functie

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mu x(1-x)^3 \end{array}$$

waarbij μ een parameter is die voldoet aan $\mu > 0$.

(i) Bereken voor willekeurige $\mu > 0$ het maximum van f op $[0,1]$. Hoe groot mag μ hoogstens zijn om $f(x) \in [0,1]$ te waarborgen?

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich volgens de recursie

$$x_{n+1} \;=\; f(x_n) \quad \text{voor alle } n \geq 0.$$

Hierbij staat x_n voor de (geschaalde) populatiegrootte op dag n. (z.o.z.)

(*ii*) Bepaal voor willekeurige $\mu > 0$ de dekpunten van deze recursie. Merk op dat alleen oplossingen in $[0, 1]$ zinvol zijn. Voor welke waarden is dat het geval?

(*iii*) Ga voor elk van de dekpunten (uit onderdeel (*ii*)) na voor welke waarden van $\mu > 0$ dit dekpunt stabiel is.

(*iv*) In de volgende schets van een bifurcatiediagram voor deze klasse van recursierelaties (bij een willekeurige maar vaste waarde van $x_0 = 0.2$) is het lange-termijngedrag van de oplossing x_n getekend als functie van μ. Laat in korte bewoordingen zien hoe je het antwoord op het vorige onderdeel kunt controleren aan de hand van de waarden van dit bifurcatiediagram in $\mu = 0.5$, $\mu = 1.5$, $\mu = 4$ en $\mu = 5.5$.