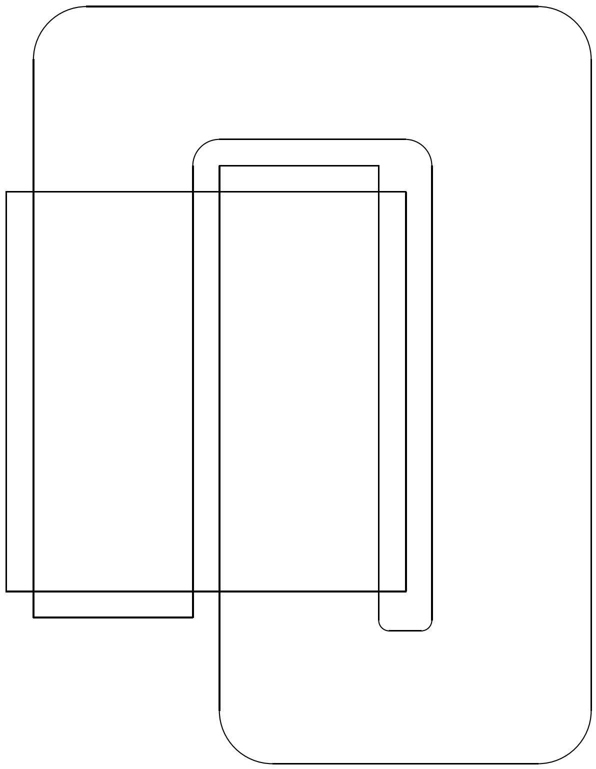
3.4 Hoefijzer van Smale

Definieer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zodanig, dat het vierkant $Q = [0,1] \times [0,1]$ d.m.v. rekken en vouwen zoals in het plaatje aangegeven (gedeeltelijk) op zichzelf wordt afgebeeld.



Wij zijn alleen geïnteresseerd in de dynamica op Q, en het is gemakkelijk om voor het gedeelte van f met beeld in Q een expliciete lineaire formule aan te geven, voor de situatie in het plaatje is dat bv.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{15}, 5y - \frac{1}{15}\right) \qquad \text{als } \tfrac{1}{75} \leq y \leq \tfrac{16}{75} \\ f(x,y) &= \left(\frac{2}{5}x + \frac{8}{15}, 5y - \frac{59}{15}\right) \qquad \text{als } \tfrac{59}{75} \leq y \leq \tfrac{74}{75} \ . \end{aligned}$$

We zien dat de doorsnede $Q \cap f(Q)$ uit twee verticale rechthoeken bestaat en na verdere iteratie bestaat $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ uit vier verticale rechthoeken, $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) \cap f^3(Q)$ uit acht verticale rechthoeken en algemeen $Q \cap \ldots \cap f^n(Q)$ uit 2^n verticale rechthoeken. De breedte van deze rechthoeken krimpt sterk naarmate n groeit en is voor bovenstaand voorbeeld $(\frac{2}{5})^n$. In de limiet $n \to \infty$ nadert deze naar 0 en bestaat

$$\Lambda^+ \quad := \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} f^k(Q)$$

uit verticale lijnstukken. Om na te gaan dat het om overaftelbaar veel verticale lijnstukken gaat geven we aan lijnstuk ℓ een label $a(\ell) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, en wel als volgt. Elk lijnstuk $\ell \in \Lambda^+$ zit ook in een van de verticale rechthoeken uit de eindige doorsnede $Q \cap \ldots \cap f^n(Q)$, zeg de m-de verticale rechthoek, en de binaire ontwikkeling

$$m - 1 \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}$$

levert het beginstuk ter lengte n van $a(\ell)$ op (waarom werkt deze manier van definiëren?). Omdat er voor ieder lijnstuk precies één rijtje $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is zijn er hiervan net zo veel als elementen van $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d.w.z. overaftelbaar veel. In het beeld $f(\ell)$ liggen twee verticale lijnstukken, namelijk de lijnstukken met label $(0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ en met label $(1, a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

De verzameling $f^{-1}(Q) \cap Q$ van punten die in Q liggen en na toepassen van f in Q blijven bestaat uit twee horizontale rechthoeken. Voor bovenstaand voorbeeld zijn dit de rechthoeken $[0,1] \times [\frac{1}{75}, \frac{16}{75}]$ en $[0,1] \times [\frac{59}{75}, \frac{74}{75}]$. Ook dit kunnen we tot 2^n (nu horizontale) rechthoeken $f^{-n}(Q) \cap f^{-n+1}(Q) \cap \ldots \cap f^{-1}(Q) \cap Q$ itereren, dit leidt in de limiet

$$\Lambda^- \quad := \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} f^{-k}(Q)$$

tot overaftelbaar vele horizontale lijnstukken met labelling $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

De doorsnede

$$\Lambda \quad := \quad \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(Q) \quad = \quad \Lambda^- \cap \Lambda^+$$

bestaat uit alle punten die Q nooit verlaten en er ook altijd al in hebben gezeten. Een gegeven punt $x \in \Lambda$ zit op precies één verticaal lijnstuk en op precies één horizontaal lijnstuk, met labels $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Definieer de afbeelding

$$T \; : \; \Lambda \quad \longrightarrow \quad \Sigma := \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$$

d.m.v. $T(x) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ met $c_i = b_i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ en $c_j = a_{1-j}$ voor alle $j \in \mathbb{N}$, dus i.h.b. $c_0 = a_1$.

De afbeeldig T is een bijectie, dus Λ bevat net zo veel punten als het vierkant Q waarmee we begonnen zijn. De deelverzameling Λ van Q heeft de volgende topologische eigenschappen.

- Λ is gesloten, d.w.z. alle limietpunten van Λ zijn ook elementen van Λ.
- Λ heeft geen geïsoleerde punten, d.w.z. elk punt $x \in \Lambda$ is een limietpunt van $\Lambda\backslash\{x\}$.
- Λ is totaal onsamenhangend. Tussen elk tweetal punten van Λ is er een scheidend verticaal of horizontaal rechthoek dat wél in Q maar niet in Λ ligt. I.h.b. bevat Λ geen inwendige punten.
- Samengevat: Λ is een Cantorverzameling.

De verzameling Λ is zo gedefinieerd dat de restrictie

$$f|_\Lambda \;:\; \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

van f tot Λ deze verzameling invariant laat. De dynamica van deze restrictie is een belangrijk (deel)aspect van de dynamica van f op het hele vierkant Q. Als we op Σ de shiftoperator

$$\sigma \;:\; \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

met $(\sigma((c_k)_k))_l = c_{l+1}$ bekijken, d.w.z. de operator die rijtjes 1 plaats naar links opschuift, dan is

$$f|_\Lambda = T^{-1} \circ \sigma \circ T$$

en dus ook

$$f^k|_\Lambda = T^{-1} \circ \sigma^k \circ T$$

voor alle $k \in \mathbb{Z}$. M.b.v. de door σ gedefinieerde symbolische dynamica kunnen we voor de restrictie $f|_\Lambda$ van de afbeelding f concluderen:

- periodieke banen liggen dicht,
- de dynamica hangt gevoelig af van de beginwaarde,
- er is een dichte baan.

- Samengevat: het systeem gedraagt zich (op Λ!) chaotisch.

Deze conclusie is zeer robuust, we hadden hiervoor niet de in het begin gegeven expliciete formules nodig, en zelfs voor (lichtelijk) niet-lineair gedrag van f op $f^{-1}(Q) \cap Q$ blijft de conclusie waar.