Modellen en Simulatie 2007, inleveropgave 1

Inleverdatum: 28 februari 2007 (9:00)

Insecten

In laboratoria kan men populaties van insecten bestuderen die geïsoleerd zijn van invloeden anders dan de grootte van de populatie. We gebruiken het model

$$N_{n+1} = \frac{\lambda N_n}{(1 + aN_n)^b} \tag{1}$$

met drie positieve parameters $\lambda, a, b > 0$. Hierbij is N_n de grootte (of de dichtheid) van de populatie op het n-de tijdstip, λ is de dichtheidsonafhankelijke groeifactor en a, b bepalen de dichtheidsafhankelijke mortaliteit. Voor $a = b = 1$ hebben we (1) als het model van Beverton en Holt al leren kennen.

tabel 1. Parameterwaarden voor drie snuitkever-populaties

	λ	a	b
A	22.5	0.0013	0.7–1.1
B	32.5	0.0006	1.8–2.5
C	37.5	0.0001	2.1–3.3

Terwijl λ in laboratoria vrij nauwkeurig bepaald kan worden door het aantal eitjes te tellen, moet men de functie in de noemer door curve fitting bepalen. Voor 3 populaties van snuitkevers levert deze onnauwkeurigheid de in tabel 1 opgenomen intervallen voor de waarden van b op.

Opdracht 1. Gebruik het notebook `iteratie.nb` om een eerste indruk van de dynamica's van de 3 snuitkever-populaties te verkrijgen. Maak voor je verslag een verstandige keuze welke aspecten je d.m.v. een plaatje wilt verduidelijken en waar een beschrijving voldoende is.

Eigenlijk zou tabel 1 ook voor de waarden van a intervallen moeten aangeven, maar a heeft op de dynamica alleen een kwantitatieve en geen kwalitatieve invloed.

Opdracht 2. Gebruik de herschaling $x = aN$ om (1) om te vormen in de recursie

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{(1 + x_n)^b} \tag{2}$$

met dezelfde parameters λ en b als (1).

Stabiliteitsanalyse

We bekijken nu eerst de recursie (2) zelf, zonder daarbij aan snuitkevers of andere insecten te denken.

Opdracht 3. Bepaal (afhankelijk van (λ, b)) de evenwichtspunten van (2) en hun stabiliteit. Kun je je bevindingen d.m.v. het notebook `iteratie.nb` bevestigen?

In het positieve kwadrant van het (λ, b)-vlak staat elk punt voor een door (2) bepaalde dynamica. Hierover willen we een eerste overzicht verkrijgen.

Opdracht 4. Bereken de afgeleide van de rechter kant van (2) in het niettriviale evenwichtspunt. Stel de zo verkregen uitdrukking (die van λ en b afhangt) gelijk aan de waarden $1, 0$ en -1, en teken de hierdoor gedefinieerde drie krommen in het (λ, b)-vlak.

Wat houden deze resultaten in voor de populaties uit tabel 1 ?

Opdracht 5. Markeer de waarden uit tabel 1 eveneens in het (λ, b)-vlak. Hoe verandert de dynamica als λ de aangegeven vaste waarde aanneemt en b binnen het aangegeven interval varieert?

Lucilia cuprina

De parameter b geeft aan hoe de middelen (in het laboratorium: voedsel) binnen de populatie worden verdeeld. Hoe kleiner de waarde hoe groter het verschil tussen 'succesvolle' insecten die wel voldoende voedsel weten te bemachtigen en hun minder succesvolle soortgenoten. In de limiet $b \to \infty$ worden de middelen zo evenredig verdeeld dat alleen nog de toevalligheden van de ruimtelijke distributie verhinderen dat een overgrote populatie in de volgende generatie compleet uitsterft.

Voor een schapenvleesvlieg populatie werd in een laboratorium-onderzoek $\lambda = 60$ gevonden en de geschatte waarden van b waren zo hoog dat het nemen van de limiet $b \to \infty$ zinvol lijkt.

Opdracht 6. Laat zien dat de recursie (1) in de simultane limiet $a \to 0$, $b \to \infty$, met inachtneming van $ab = \alpha \in \mathbb{R}$, leidt tot de recursie

$$N_{n+1} = \frac{\lambda N_n}{\mathrm{e}^{\alpha N_n}} \tag{3}$$

(het model van Ricker).

Ook hier heeft één parameter geen invloed op de dynamica.

Opdracht 7. Vind een geschikte herschaling die (3) omvormt in de recursie

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{\mathrm{e}^{x_n}} = \mathrm{e}^{\ln(\lambda) - x_n} x_n \tag{4}$$

met dezelfde parameter λ als in (3).

Nu we met een 1-parameter familie van recursies te maken hebben kunnen we d.m.v. de procedure `bifurcatie` een globaal overzicht verkrijgen.

Opdracht 8. Geef een bifurcatie-diagram van (4). Experimenteer hiervoor met de mogelijkheid om op de horizontale as $\ln(\lambda)$ i.p.v. λ te nemen en maak voor je verslag een verstandige keuze voor het interval van λ-waarden.

Dit resultaat geeft aanleiding tot een vermoeden hoe het (λ, b)-vlak van (2) verder onderverdeeld moet worden. D.m.v. welgekozen 1-parameter onderfamilies langs krommen in het (λ, b)-vlak zou men dit vermoeden kunnen toetsen.