Modellen en Simulatie 2007, inleveropgave 2

Inleverdatum: 16 maart 2007 (9:00)

De stuiterende bal

We laten een bal op een tafel vallen, waarvandaan hij wordt teruggekaatst. De tijd tot de daarop volgende impact is dan

$$\tau = \frac{2v}{g}$$

waar g de gravitatie-versnelling is. De snelheid zal tijdens de vlucht geleidelijk afnemen, totdat in het bovenste punt van de baan de kinetische energie volledig is omgezet in potentiële energie en de bal vervolgens weer naar beneden valt. Bij de volgende impact is de potentiële energie weer omgezet in kinetische energie; in termen van de j-de impact is de $(j+1)$-de impact gegeven door tijdstap $t_{j+1} = t_j + \tau_j$ (waar de index j aangeeft dat de tussenliggende tijd τ van de beginsnelheid v_j afhangt) en nieuwe beginsnelheid $v_{j+1} = \alpha v_j$, waar $\alpha \in [0,1]$ het energieverlies tijdens vlucht en terugkaatsen meet. Voor $\alpha = 1$ is er geen luchtwrijving en stuitert de bal volledig elastisch; voor $\alpha = 0$ blijft de bal meteen liggen.

We kiezen eenheden waarin $g = 2$ en modelleren de stuiterende bal d.m.v. de afbeelding

$$f_\alpha : \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t+v \\ \alpha v \end{pmatrix} .$$

We zijn geïnteresseerd in het gedrag voor (lichte) wrijving, dus $\alpha < 1$ maar tegelijk $\alpha > 0$.

Opdracht 1. Gebruik het notebook `stuitbal.nb` om een overzicht te verkrijgen over de door f_α gedefinieerde dynamica voor verschillende waarden van α in het open interval $]0,1[$. Bepaal vervolgens de dekpunten van f_α en hun stabiliteit. Wat betekent dit voor de stuiterende bal ? Kun je ook een interpretatie voor de eigenwaarde 1 geven ?

Aandrijving

Om de dynamica wat spannender te maken gaan we de tafel periodiek aandrijven; het tafelblad blijft altijd loodrecht op de verticale as maar beweegt volgens $-\beta \sin t$ op en neer (we kiezen tijdseenheden waarin de periode van tafeltrilling 2π is).

Opdracht 2. Stel $\gamma = (1+\alpha)\beta$ en beredeneer hoe je aan het volgende model voor de stuiterende bal komt:

$$f_{\alpha,\gamma} : \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} t+v \\ \alpha v - \gamma \cos(t+v) \end{pmatrix} \quad .$$

Hierbij is $\gamma > 0$ en nog steeds $0 < \alpha < 1$.

In de meeste gevallen zul je de waarde van α vast houden en alleen γ variëren.

Opdracht 3. Bereken de Jacobi-determinant, dat is det $Df(t, v)$ waar

$$Df \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \quad .$$

Een constante Jacobi-determinant betekent dat f de oppervlakte uniform laat krimpen (en voor $\alpha = 1$ zelfs behoudt). Het is daarom ook niet mogelijk de parameter α overbodig te maken door altijd γ geschikt te kiezen. Omdat Df voor alle (t, v) inverteerbaar is verwachten we dat ook f zelf inverteerbaar is.

Opdracht 4. Laat zien dat f inverteerbaar is door de inverse f^{-1} expliciet aan te geven.

Voor elke $n \in \mathbb{Z}$ wordt door

$$\begin{array}{cccc} \psi_n : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, v) & \mapsto & (t + 2n\pi, v) \end{array} \tag{1}$$

een coördinatentransformatie gedefinieerd.

Opdracht 5. Ga na dat de afbeelding f niet verandert als we ψ_n toepassen, d.w.z. $f(t, v) = f(\psi_n(t, v))$ voor alle $(t, v) \in \mathbb{R}^2$. Kun je hiervoor en interpretatie geven ?

Men zegt ook dat de afbeelding f equivariant is onder de door (1) gedefinieerde groepsactie van $\mathbb{Z}$ op $\mathbb{R}^2$. Hierdoor wordt een equivalentierelatie op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd, de quotientruimte kan met de cylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ worden geïdentificeerd en f induceert een afbeelding van de cylinder op zichzelf (zoals men in het college groepentheorie kan leren).

Deze constructie kunnen we omzeilen door f in de variabele t tot $[0, 2\pi[$ te beperken en van $f(t, v)$ een zodanig veelvoud van 2π af te trekken dat we weer in $[0, 2\pi[$ terecht komen. De zo geherdefinieerde f lijkt dan in punten (t, v) met $t = 0$ niet meer continu (laat staan differentieerbaar) te zijn, maar als we $[0, 2\pi[$ tot een cirkel aan elkaar plakken, dus op $S^1 \times \mathbb{R}$ i.p.v. $[0, 2\pi[\, \times \mathbb{R}$ werken, is f wél in elk punt differentieerbaar (zoals men in het college differentieerbare variëteiten kan leren).

Opdracht 6. Beredeneer dat $\det Df$ niet verandert voor deze geherdefinieerde afbeelding. Hoe moet men de formule voor de inverse f^{-1} aanpassen ?

Voor sommige oplossingen wordt v negatief, en dan is er natuurlijk geen sprake meer van een weerkaatsende bal. De afbeelding f blijft wel goed gedefinieerd.

Opdracht 7. Bereken de dekpunten van (de geherdefinieerde) f in afhankelijkheid van de parameters α en γ. Geef ook een grafische oplossing. Kun je een interpretatie geven voor dekpunten (t, v) met $v < 0$? Wat betekent $f(t, 0) = (t, 0)$?

De door $f : [0, 2\pi[\, \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi[\, \times \mathbb{R}$ gedefinieerde dynamica is i.h.a. vrij ingewikkeld en we proberen er d.m.v. de dekpunten enig begrip te ontwikkelen.

Opdracht 8. Voor welke parameterwaarden zijn er stabiele dekpunten ? Hoe verliezen dekpunten hun stabiliteit ?

De stabiele dekpunten ondergaan voor groeiende waarden van γ uiteindelijk een periodeverdubbeling, het begin van een reeks van periodeverdubbelingen.

Opdracht 9. Geef voor welgekozen parameterwaarden faseportretten aan waarin een stabiele baan van periode 2 te zien is. Verhoog γ verder opdat deze naar een stabiele baan van periode 4 bifurqueert. Lukt dit ook voor periode 8 (of 16) ?

Chaotisch gedrag

Net als in de logistische afbeelding leidt de reeks van periodeverdubbelingen uiteindelijk tot chaos. Dit laten we zien door een Smale hoefijzer in de afbeelding te construeren.

Opdracht 10. Geef (voor welgekozen parameterwaarden) een korte brede vierhoek Q aan dat door f tot een lange smalle vierhoek wordt gerekt en dan dubbelgevouwen op Q komt te liggen.

We zijn geïnteresseerd in de verzameling $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$.

Opdracht 11. Beredeneer waarom f beperkt tot Λ chaotisch is. Kun je dit chaotisch gedrag in faseportretten terug vinden ? Heeft het betekenis voor de dynamica van de stuiterende bal ?