Hertentamen modellen en simulatie 27 mei 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, en op het eerste vel bovendien het nummer van je collegekaart en de naam van je werkcollegeleider (Alex Boer of Bas Janssens).
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Diktaat en aantekeningen mogen gebruikt worden, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Beschouw de functie $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ gegeven door

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3x \quad \text{als} & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

   (*i*) Schets de grafieken van f en van f^2.

   (*ii*) Laat zien dat f periodieke banen van willekeurig hoge perioden heeft.

   (*iii*) Ga na dat in elke omgeving $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ van een gegeven punt x een punt $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ bestaat waarvoor de baan $y, f(y), f^2(y), \ldots$ periodiek is.

   (*iv*) Beredeneer dat de door f gegeven dynamica gevoelig afhankelijk is van de beginwaarden.

2. We bekijken een vogelpopulatie. Observaties vinden steeds plaats aan het begin van het broedseizoen. Bekend is dat nuljarige vogels (de vogels die in het laatste broedseizoen geboren zijn) gemiddeld $\frac{9}{4}$ ei leggen. Eénjarigen leggen gemiddeld 9 eieren, tweejarigen leggen gemiddeld $\frac{27}{2}$ eieren.

   Verder is het volgende bekend: uit gemiddeld een fractie s, $0 < s < 1$, van de eieren komt een gezond jong. Van de gezondgeboren jongen overleeft maar $\frac{2}{3}$ tot het volgende broedseizoen. Verder overleeft van de aanwezige nuljarigen bij het begin van een broedseizoen gemiddeld $\frac{2}{15}$ tot éénjarige (bij het begin van het volgende broedseizoen). Van de éénjarigen overleeft gemiddeld $\frac{1}{6}$ tot tweejarige, en van de tweejarigen overleeft niet één vogel tot driejarige.

   Laat $x(n) = (x_0(n), x_1(n), x_2(n))^T$ de populatie vogels bij het begin van het broedseizoen in jaar n zijn, waarbij $x_i(n)$ het aantal i-jarigen is bij het begin van het n-de broedseizoen. Er geldt

$$x(n+1) = Lx(n).$$

   (*i*) Geef de matrix L, en de bijbehorende gerichte graaf.

   (*ii*) Is L a-periodiek? Heeft de matrix L een dominante eigenwaarde?

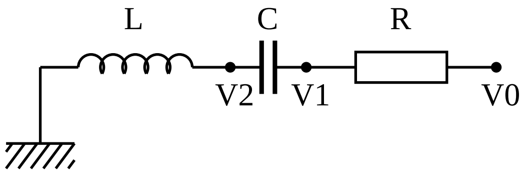
   (*iii*) Stel de eigenwaarde vergelijking op voor L.

   (*iv*) Laat zien dat 1 een eigenwaarde is van L als $s = \frac{2}{5}$, en bereken ook de overige eigenwaarden van L bij deze waarde van s.

   (*v*) Laat weer $s = \frac{2}{5}$. Als $x(0) = (150, 100, 50)^T$, wat is dan $\lim_{n\to\infty} L^n x(0)$?

   (*vi*) **Bonusvraag** Voor welke waarden van s sterft de populatie uit?

3. We bekijken onderstaande schakeling waarin een weerstand, een condensator en een spoel in serie zijn geschakeld.



De spoel wordt geaard en de weerstand wordt aangesloten op een spanningsbron met spanning $V_0(t) = \sin(\omega t)$.

(i) De spanningen V_1 en V_2 voldoen aan een stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= -\frac{RV_2(t)}{L} + \dot{V}_0(t) \\ \dot{V}_2(t) &= \dot{V}_1(t) + \frac{V_1(t) - V_0(t)}{RC}. \end{aligned}$$

Leidt hieruit één tweede-orde differentiaalvergelijking af voor V_2. (Hint: bereken de tijdsafgeleide van de tweede vergelijking.)

(ii) Geef aan in hoeverre de in (i) verkregen vergelijking equivalent is met

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f\sin(\omega t)$$

waarbij $m = 1$, $c = \frac{R}{L}$ en $k = \frac{1}{LC}$.

(iii) Waar vindt (in termen van R, L en C) in het geval $\omega = 0$ zonder aandrijving een gedempte trilling plaats en waar is sprake van overdemping?

(iv) Bereken (nu weer voor ingeschakelde aandrijving $\omega > 0$) de frequentie ω waarvoor resonantie optreedt: wanneer is de amplitude van de aangedreven oscillator het grootst?

4. X en multimiljonair Y spelen een spel. Uit een drietal kluizen, k_1, k_2 en k_3, met inhoud respectievelijk €2000, €3000 en €4000 kiest X er één. Y kiest gelijktijdig een sleutel die één van de kluizen opent. Y heeft drie sleutels: voor elke kluis 1.

Als X kluis i gekozen heeft, en Y de sleutel die kluis j opent dan,

- wint X de inhoud van de door hem gekozen kluis als $i = j$,
- verliest X €1000 als $i < j$,
- verliest X €2000 als $i > j$.

X heeft als doel zijn minimaal gegarandeerde winst te maximaliseren, en speelt volgens een strategie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, 3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, waarbij x_i de kans is dat X kluis i kiest.

(i) Geef de opbrengstmatrix voor X van dit spel.

(ii) Het bepalen van een optimale strategie voor X komt neer op het oplossen van een lineaire programmeringsprobleem. Formuleer dit lineaire programmeringsprobleem.

(iii) Los het lineaire programmeringprobleem op. Is dit een eerlijk spel?