Opgaven modellen en simulatie 2006/7

1. Beschouw de functie $f : [0,1[\longrightarrow [0,1[$ gegeven door

$$f(x) \;\; := \;\; 10x - \text{entier}(10x)$$

waar entier(y) het gehele gedeelte van y is, bv. entier$(\pi) = 3$.

(i) Bereken $f^n(x_0)$ voor $n = 1, 2, 3$ en $x_0 = 0.1642007$.

(ii) Laat zien dat f periodieke banen van willekeurig hoge perioden heeft.

(iii) Ga na dat in elke omgeving $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ van een gegeven punt x een punt $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ bestaat waarvoor de baan $y, f(y), f^2(y), \ldots$ periodiek is. *Hint: hoe ziet de grafiek van f^n eruit, i.h.b. voor hoge waarden van n ? Alternatief: gebruik symbolische dynamica op* 10 *cijfers* $\{0, \ldots, 9\}$.

(iv) Beredeneer dat de door f gegeven dynamica gevoelig afhankelijk is van de beginwaarden.

2. In deze opgave bestuderen we een vispopulatie met 3 generaties. De jongste generatie heeft een overlevingskans $p \in]0, 1[$ om van ei door te groeien naar volwassen vis. Deze vormen de tweede generatie, de helft ervan produceert elk (gemiddeld) 10.000 eitjes en sterft, de andere helft gaat door naar de derde generatie. Iedere vis die de derde generatie bereikt produceert (gemiddeld) 10.000 eitjes en sterft.

(i) Stel een model op. Laat hiervoor $s(n) \in \mathbb{R}^3$ het aantal vissen in tijdstap n zijn en stel de 3×3 matrix L op die de dynamica

$$s(n+1) \;\; = \;\; L \cdot s(n)$$

bepaalt.

(ii) Geef de bijbehorende gerichte graaf. Is L aperiodiek? Heeft L een dominante eigenwaarde?

(iii) Stel de eigenwaardevergelijking $f(\lambda) = 0$ op voor L. Bereken de afgeleide $f'(\lambda)$ en schets de 3 mogelijke gevallen voor de verdeling van reële wortels van f. Concludeer dat in alle 3 gevallen de dominante eigenwaarde de enige positieve reële eigenwaarde is.

(iv) Bereken de waarde van p waarvoor 1 een eigenwaarde is van L en concludeer dat 1 dan de dominante eigenwaarde is.

(v) In een meer worden 500 tweedejaars vissen uitgezet, dus $s(0) = (0, 500, 0)$. Als $p = 10^{-4}$, wat is dan de populatie na (oneindig) veel jaren?

3. Gegeven het parameterafhankelijke systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - y^3 \\ \dot{y} &= xy + y \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen, waarbij $\alpha > 0$.

(i) Bepaal de evenwichtspunten van dit systeem.

(ii) Geef de Jacobimatrix van dit systeem.

(iii) Bepaal voor ieder evenwichtspunt de stabiliteitstype(s), afhankelijk van de waarde van α.

(iv) Als we $\alpha < 0$ nemen, wat is het stabiliteitstype van de twee evenwichtspunten dan?

4. Xander en Yvonne spelen een matrixspel met uitkomsten

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 2 & p-2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

waar $p \in [0, 1]$ een nog nader te bepalen parameter is.

(i) Bepaal voor $p = 1$ de waarde van het spel door een optimale strategie van Xander te berekenen. Herformuleer hiervoor zijn minimaliseringsprobleem als een lineair programmeringsprobleem.

(ii) Bepaal voor $p = 0$ een optimale strategie van Yvonne.

(iii) Voor welke waarde van p is dit spel eerlijk (d.w.z. de waarde van het spel is 0) ?