Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Störungstheorie dynamischer Systeme

Heinz Hanßmann

3. Übungsblatt Aachen, den 24.4.2014

Sommersemester 2014

5. Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ definiert eine lineare Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$, bezeichne das entsprechende Vektorfeld mit L_A. Neben der Lie-Klammer $[L_A, L_B]$ gibt es auch den Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Matrizen; zeige

$$[L_A, L_B] \;=\; -L_{[A,B]} \;.$$

Zeige weiter

$$\varphi_t \circ \psi_s \;-\; \psi_s \circ \varphi_t \;=\; s\,t\,[A, B] \;+\; \mathcal{O}\left((s^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

für die Flüsse φ von L_A und ψ von L_B und schließe, daß $[L_A, L_B] = 0$ falls diese beiden Flüsse kommutieren.

6. Zeige, daß $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$ die Liealgebra der Liegruppe $SL_n(\mathbb{R}) = \{S \in M_{n \times n} \mid \det S = 1\}$ ist. Berechne dazu für eine Kurve

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M_{n \times n} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

den entsprechenden Tangentialvektor

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right|_{t=0}$$

und schließe mittels $\gamma(t) = \exp tA$, daß $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}} SL_n(\mathbb{R})$. Welche Konsequenzen hat dies für den Fluß eines divergenzfreien Vektorfeldes?