Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Störungstheorie dynamischer Systeme

Heinz Hanßmann

9. Übungsblatt Aachen, den 10.7.2014

Sommersemester 2014

17. Das Vektorfeld X habe den multi-periodischen Torus V. Zeige, daß $X_{|V}$ genau dann quasi-periodisch ist, wenn V der Abschluß einer jeden Bahn ist.

18. Definiere auf $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ein Kreis mit Radius $\frac{1}{2\pi}$) zu gegebener Rotationszahl $\rho \in \mathbb{R}$ die Drehung $R : x \mapsto x + \rho \pmod 1$. Zeige, daß für $\rho \notin \mathbb{Q}$ jede Bahn $\{x, R(x), R^2(x), \ldots\}$ in $\mathbb{T}$ dicht liegt. Was gilt für $\rho \in \mathbb{Q}$?

    Sei nun $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = \omega$ eine Differentialgleichung auf $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Zeige, daß für $\omega = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (vollständig gekürzt) alle Bahnen periodisch sind, und zwar mit (minimaler) Periode q. Zeige weiter, daß für $\omega \notin \mathbb{Q}$ jede Trajektorie den Torus $\mathbb{T}^2$ dicht umspinnt. *Hinweis:* Definiere eine Poincaréabbildung auf $\{x = 1\}$ und verwende den ersten Teil der Aufgabe. Wie kann man die Bahn im Quadrat $[0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ darstellen ?