Opgave 1 (afgeleiden van een lineaire afbeelding, 3 pt)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$ en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat f glad is en bereken $D^k f$ voor elke $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 2 (afgeleide van functie, 5 pt)**.** Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op $\mathbb{R}^n$. We definiëren de functie

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Laat zien dat deze functie differentieerbaar is en bereken haar afgeleide.

We duiden met $\| \cdot \|$ de Euclidische norm op $\mathbb{R}^n$ aan.

Opgave 3 (stelsel van vergelijkingen, 7pt)**.** (i) Laat zien dat er reële getallen $r, r' > 0$ met de volgende eigenschappen bestaan: Voor elke $y \in \mathbb{R}^2$ zó, dat $\big\|y - (1,1)\big\| < r'$, bestaat er een eenduidige oplossing $x = x_y \in \mathbb{R}^2$ van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \sin(x_1) + e^{-x_2} &= y_1 \\ e^{x_1} + \sin(x_2) &= y_2, \end{aligned}$$

zó, dat $\|x_y\| < r$. Verder is de afbeelding $y \mapsto x_y$ glad.

(ii) Bereken de afgeleide van de afbeelding $y \mapsto x_y$ in het punt $(1,1)$.

Opgave 4 (lijnintegraal, 14 pt)**.** Beschouw de verzameling

$$C := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^6 - x + y^6 - y = 0\big\}.$$

(i) Bewijs dat C compact is.

(ii) Laat zien dat C een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^2$ is. Bereken haar dimensie.

(iii) Bereken de raakruimte aan C in het punt $(0,0) \in C$.

(iv) Vind een eenheidsraakvectorveld T langs C.

(v) Bereken de lijn-integraal

$$\int_C X \cdot T \, ds,$$

van het vectorveld

$$X(x,y) := \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ \cos(y^3) \end{pmatrix}.$$

Hint: Gebruik een stelling uit het hoorcollege.

Opgave 5 (maximum is een kritiek punt, 4pt)**.** Zij $M \subseteq \mathbb{R}^n$ een C^1-deelvariëteit, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ en $x_0 \in M$ een punt waarin f zijn maximum aanneemt. Laat zien dat x_0 een kritiek punt van f is.

Hint: Je mag een soortgelijke uitspraak voor een functie van één reële variabele gebruiken.

Z.O.Z.

Opgave 6 (Lagrange-multiplicator-methode, 5 pt)**.** Zij

$$n, p \in \mathbb{N}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ open}, \; F \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^p),$$
$$M := g^{-1}(0), \quad f := F|_M, \quad x_0 \in U,$$
$$L : U \times \operatorname{Lin}\big(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda(g(x)).$$

Stel dat g een submersie is en dat er een $\lambda \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ bestaat zó, dat (x_0, λ) een kritiek punt van L is. Laat zien dat x_0 een kritiek punt van f is.

Opgave 7 (twee-dimensionale integraal, 4pt)**.** Bereken

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 \tan\big(\cos(x_1)x_2\big)\, dx_1 \right) dx_2.$$

Opmerking: Als je een stelling gebruikt, ga dan na dat aan de voorwaarden van deze stelling voldaan is.

Opgave 8 (integraal van functie, 13 pt)**.** (i) Teken een plaatje van de verzameling

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 2,\ 2\pi \le xy \le 4\pi \right\}.$$

(ii) We definiëren de functie

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \frac{y}{x} \sin(xy).$$

Laat zien dat f (eigenlijk) Riemann-integreerbaar is over S. Bereken de Riemann-integraal van f over S.

Hint: Gebruik een stelling uit het hoorcollege.

Opgave 9 (flux door oppervlak, 8 pt)**.** We definiëren

$$X : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4, \quad X(x) := x\|x\|^{-4}, \qquad M := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 1 \right\}.$$

De verzameling M is een glad hyperoppervlak. (Dit hoef je niet te bewijzen.) Zij ν een eenheids-normaalvectorveld op M zó, dat $\nu\big(1, 0, 0, 0\big) = \big(1, 0, 0, 0\big)$. Bereken de flux van X door M m.b.t. ν.