INDUCTIE

Handout bij het college Wiskunde voor CKI 2000/2001

Albert Visser en Piet Lemmens

Ontstaan door reconstructie van:
Albert Visser: *Inductieve Definities, Inductie, Recursie.* Handout bij het college Logische Semantiek 86/87
met extra opgaven.

Inductieve definities, inductie en recursie vormen een krachtig hulpmiddel in logica en taalwetenschap. Het is mogelijk dit onderwerp – zoals in de wiskunde gebruikelijk is – binnen de Verzamelingenleer te ontwikkelen, omdat het echter direct inzichtelijk is (en volgens sommigen even fundamenteel als de Verzamelingenleer) prefereer ik een intuitieve benadering. Het begin van alle dingen op dit gebied is de inductieve definitie. Inductieve definities zijn een middel om verzamelingen te creëren. We beginnen met enkele voorbeelden.

Blurpsen

Definitie
De verzameling van de Blurpsen is de kleinste verzameling zodat:
(i) $\triangle$ is een Blurps.
(ii) Als x een Blurps is, dan zijn ook $x\triangle\triangle$ en $\Diamond xx\Diamond$ Blurpsen.
(iii) Als x en y Blurpsen zijn, dan is ook $x\triangle y$ een Blurps.

Een inductieve definitie is een soort instructie om de elementen van de gedefinieerde verzameling te bouwen. Er is één startelement, te weten $\triangle$, op grond van clausule (i). In de context van onze definitie is $\triangle$ de atomaire Blurps. Uit $\triangle$ kunnen we op grond van (ii) de volgende elementen maken: $\triangle\triangle\triangle$, $\Diamond\triangle\triangle\Diamond$. Op grond van (iii) kunnen we uit $\triangle$, $\triangle\triangle\triangle$ maken. Merk op dat we $\triangle\triangle\triangle$ dus op twee manieren kunnen produceren.
Uit de nieuw gevormde Blurpsen kunnen we met (ii) en (iii) weer nieuwe Blurpsen maken:
$\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle$, $\Diamond\triangle\triangle\Diamond\triangle\triangle$, $\Diamond\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\Diamond$, $\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond$,
$\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle$, $\triangle\triangle\triangle\triangle\Diamond\triangle\triangle\Diamond$, $\Diamond\triangle\triangle\Diamond\triangle\triangle\triangle\triangle$, $\Diamond\triangle\triangle\Diamond\triangle\Diamond\triangle\triangle\Diamond$.
Enzovoorts.
De rituele frase dat de gedefinieerde verzameling de kleinste zij die aan de clausules voldoet, vertelt ons dat alleen maar dingen in de verzameling mogen worden gestopt op grond van het hierboven geschetste constructieproces. Zo kunnen bijvoorbeeld $\Diamond$ en $\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond$ geen Blurpsen zijn.

Opgave 1
Welke van de volgende rijtjes zijn Blurpsen:
$\triangle\triangle\triangle\triangle$, $\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle$, $\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle$, $\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle$,
$\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond\triangle\Diamond\Diamond$, $\Diamond\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond$

De tekens 'x' en 'y' die we in de definitie van de Blurpsen gebruikt hebben zijn beslist niet zelf Blurpsen! Het zijn variabelen die wij gebruikten om over Blurpsen te spreken.

Natuurlijke getallen

Definitie
De verzameling der natuurlijke getallen is de kleinste verzameling zodat:
(i) 0 is een natuurlijk getal
(ii) Als x een natuurlijk getal is, dan is ook $x + 1$ een natuurlijk getal.

Merk op dat we hier aannemen dat we al weten wat '+1' betekent. Ga na dat volgens onze definitie 0, 1, 2, 3, ... natuurlijke getallen zijn, maar niet: -1, $1/2$, π en i. In onze nieuw verworven optiek is 0 het 'atoom' van de natuurlijke getallen.

De taal L van de Propositielogica

Definitie
L is de kleinste verzameling zodat:
(i) p, q, r, p_1, p_2, p_3, ... zijn in L.
(ii) Als φ in L is, dan ook $\neg\varphi$.
(iii) Als φ en ψ in L zijn, dan ook: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Bijvoorbeeld: p, q, $(p \wedge q)$, r, $\neg r$, $\neg\neg r$, $((p \wedge q) \to \neg\neg r)$ zijn in L, maar $((, p \wedge q,)p \wedge q($ en $]$ zijn niet in L.

De tekens 'φ' en 'ψ' die we in de definitie van L gebruikt hebben zijn niet zelf in L. Ze zijn variabelen die wij gebruiken in onze taal geheel analoog aan het gebruik van 'x' en 'y' bij de definitie van de Blurpsen. Omdat 'p', 'q', etc. ook wel propositievariabelen genoemd worden, spreken we in het geval van 'φ', 'ψ' van metavariabelen.

Bij elke inductief gedefinieerde verzameling hebben we de mogelijkheid dingen aangaande alle elementen van die verzameling te bewijzen met behulp van Volledige Inductie over die verzameling. Ik geef voorbeelden van inductie over Blurpsen, over de natuurlijke getallen en over L.

Inductie over Blurpsen

We bewijzen bijvoorbeeld: in elke Blurps komt een even aantal ruiten voor.
Laten we eerst eens proberen dit op z'n janboerenfluitjes in te zien. Elke Blurps is gemaakt volgens de instructies. De eerste Blurps die je kunt maken is $\triangle$, deze heeft 0 en dus een even aantal ruiten. Nu kunnen we bijvoorbeeld $\triangle\triangle\triangle$ maken, omdat we geen ruiten hebben toegevoegd, hebben we nog steeds 0 en dus een even aantal ruiten. We kunnen ook $\Diamond\triangle\triangle\Diamond$ maken, dit geeft ons 2 ruiten. Nu kunnen we weer $\Diamond\triangle\triangle\Diamond\triangle\Diamond\triangle\triangle\Diamond$ maken uit $\Diamond\triangle\triangle\Diamond$ en $\Diamond\triangle\triangle\Diamond$. We hebben nu een blurps gemaakt met $2+0+2$, dus met 4 ruiten. Verder experimenteren leert dat we niet in staat zijn een Blurps met oneven aantal ruiten te produceren, omdat je uit Blurpsen met een even aantal ruiten nooit Blurpsen met een oneven aantal ruiten kunt maken!

In detail gaat het zo: bij toepassing van de eerste helft van clausule (ii) voegen we geen ruiten toe, dus als het aantal al even was blijft het even. Bij toepassing van de tweede helft van clausule (ii) maken we $\Diamond xx\Diamond$ uit x.
Als het aantal ruiten in x even is, zeg $2n$, dan is het aantal ruiten in $\Diamond xx\Diamond$ gelijk aan $2n+2n+2$, m.a.w. $2(2n+1)$, een even aantal dus. Bij toepassing van clausule (iii) maken we $x\triangle y$ uit x en y. Als het aantal ruiten in x even is, zeg $2n$, en als het aantal ruiten in y even is, zeg $2m$, dan is het aantal ruiten in $x\triangle y$ gelijk aan $2n+2m$, dat is $2(n+m)$, een even aantal. Ons atoom $\triangle$ heeft een even aantal ruiten, de eigenschap 'een even aantal ruiten hebben' plant zich voort over de toegelaten constructiestappen, dus alle Blurpsen hebben een even aantal ruiten.

Bovenstaande redenering is in feite al een redenering met Volledige Inductie, we willen deze echter nog in 'standaardvorm' zetten:

Zij $P(x) := x$ heeft een even aantal ruiten.
P noemen we de Inductie Eigenschap.
We kunnen het te bewijzene nu als volgt herformuleren: te bewijzen is: voor alle Blurpsen x geldt $P(x)$. De Inductie verloopt nu in twee stadia: we controleren dat P opgaat voor de atomen en daarna laten we zien dat P zich voortplant bij het maken van nieuwe Blurpsen volgens clausules (ii) en (iii). Dit laatste betekent dat we laten zien dat als P opgaat voor de Blurpsen die we al gemaakt hebben, dat P dan ook opgaat voor de uit de oude Blurpsen aangemaakte nieuwe Blurpsen.
De aanname dat P opgaat voor de al gemaakte Blurpsen noemen we de Inductie Hypothese (IH).

- We hebben: $P(\triangle)$

- Stel x is een Blurps met een even aantal ruiten (i.e. zodat $P(x)$). [Dit is de IH] Zeg het aantal ruiten in x is $2n$. Dan heeft $x\triangle\triangle$ ook $2n$ ruiten, en dan heeft $\Diamond xx\Diamond$ $2 \cdot 2n + 2$ oftewel $2(2n+1)$ ruiten. Er volgt: $P(x\triangle\triangle)$ en $P(\Diamond xx\Diamond)$.

- Stel x en y zijn Blurpsen met een even aantal ruiten (IH). Zeg x heeft $2n$ en y heeft $2m$ ruiten. Dan heeft $x\triangle y$ $2n + 2m$ oftewel $2(n+m)$ ruiten. Dus: $P(x\triangle y)$.

Met Volledige Inductie volgt nu: voor alle Blurpsen x $P(x)$.

Opgave 2
Laat zien dat alle Blurpsen een oneven aantal driehoekjes hebben of tenminste één ruit bevatten.

Inductie over de natuurlijke getallen

We laten zien dat voor alle natuurlijke getallen x geldt:
$0 + 1 + \cdots + x = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1)$.

$P(x) := 0 + 1 + \cdots x = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1)$

- Het is eenvoudig in te zien dat $P(0)$.
- Stel $P(x)$ (IH).

We hebben:
$0 + 1 + \cdots + x + (x+1) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1) + (x+1) = (\frac{1}{2} \cdot x + 1) \cdot (x+1) = \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x+2)$
M.a.w. : $P(x+1)$.

Concludeer met Volledige Inductie: voor alle natuurlijke getallen x: $P(x)$.

Inductie over L

We laten zien dat formules φ van L twee keer zoveel haakjes hebben als binaire logische voegtekens.

$P(\varphi) :=$ φ heeft twee keer zoveel haakjes als binaire logische voegtekens

- Als φ een atoom is, is in φ het aantal haakjes 0 en het aantal binaire logische voegtekens idem dito.
- Stel φ is van de vorm $\neg\psi$ en stel (IH): $P(\psi)$. We hebben : aantal haakjes in φ = aantal haakjes in ψ = twee keer aantal binaire logische voegtekens in ψ = twee keer aantal binaire logische voegtekens in φ.
- Stel φ is van de vorm $(\psi \wedge \chi)$ en stel (IH) $P(\psi)$ en $P(\chi)$. Zeg het aantal haakjes in φ, ψ en χ is respectievelijk h_φ, h_ψ en h_χ en het aantal binaire logische voegtekens in φ, ψ en χ is respectievelijk b_φ, b_ψ en b_χ.

We hebben: $h_\varphi = h_\psi + h_\chi + 2 = 2 \cdot b_\psi + 2 \cdot b_\chi + 2 = 2 \cdot (b_\psi + b_\chi + 1) = 2 \cdot b_\varphi$.

De gevallen van $(\psi \vee \chi)$, $(\psi \to \chi)$ en $(\psi \leftrightarrow \chi)$ zijn analoog.

Concludeer met volledige inductie dat voor alle φ in L : $P(\varphi)$.

Opgave 3
Laat zien dat elke φ in L evenveel linker als rechter haakjes heeft.

Opgave 4
Laat zien dat het aantal voorkomens van atomen in φ in L groter of gelijk is aan het aantal linker haakjes in φ plus 1.

Net zo als er met elke inductief gedefinieerde verzameling een bewijsmethode geassocieerd is (Volledige Inductie over die verzameling), is er ook met elke inductief gedefinieerde verzameling een definitie-methode geassocieerd: definitie met recursie over die verzameling. In principe definieer je met recursie een binaire relatie tussen de objecten van de gegeven inductief gedefinieerde verzameling en (eventueel) andere objecten. Meestal zal deze relatie functioneel zijn en definiëren we dus een functie met de gegeven inductief gedefinieerde verzameling als domein. Het idee achter recursieve definities lijkt sterk op dat achter inductie: je definieert eerst de relatie voor atomen,

en dan voor samengestelde objecten in termen van de relatie zoals zij al gedefinieerd was op eenvoudigere objecten. Recursief definiëren van relaties levert geen problemen: het resultaat is altijd wel weer een relatie. Maar voor het recursief definiëren van een functionele relatie (waarbij er voor iedere x slechts één y is met $R(x,y)$) moet men voorzichtig zijn.
Ik geef weer een aantal voorbeelden.

Recursie over Blurpsen

Definieer:
(i) $f(\triangle) := 1$
(ii) $f(x\triangle\triangle) := f(x) + 2$, $f(\Diamond xx\Diamond) := 2 \cdot f(x)$
(iii) $f(x\triangle y) := f(x) + f(y) + 1$

Zo is bijvoorbeeld:
$f(\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle\triangle\triangle\Diamond\triangle\triangle\Diamond) = f(\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle) + f(\Diamond\triangle\triangle\Diamond) + 1$
$= f(\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond\triangle\triangle\Diamond\Diamond) + 2 + 2 \cdot f(\triangle) + 1 = 2 \cdot f(\Diamond\triangle\triangle\Diamond) + 2 + 2 \cdot 1 + 1$
$= 2 \cdot 2 \cdot f(\triangle) + 5 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$

Opgave 5
Ga na dat f het aantal $\triangle$'s telt in een Blurps.

We hebben hier een functie gedefinieerd. Dit lukt alleen onder bepaalde condities.

Als we bijvoorbeeld $f(\triangle) := 2$ genomen hadden met de overige clausules hetzelfde, dan waren er bijvoorbeeld twee mogelijke uitkomsten geweest voor $f(\triangle\triangle\triangle)$:
$f(\triangle\triangle\triangle) = f(\triangle) + f(\triangle) + 1 = 5$ en $f(\triangle\triangle\triangle) = f(\triangle) + 2 = 4$.
De reden is dat één en dezelfde Blurps verschillende ontstaansgeschiedenissen kan hebben. Blurpsen zijn wat dit betreft analoog aan zinnen uit de natuurlijke taal die structurele ambiguïteit kunnen vertonen. Bij inductieve verzamelingen waar elk object slechts één ontstaansgeschiedenis heeft levert een definitie als hierboven altijd de gewenste functie. Gelukkig heeft bij de natuurlijke getallen en bij L elk object slechts één ontstaansgeschiedenis!

Omdat Blurpsen 'ambigu' zijn, kunnen we proberen gedesambigueerde Blurpsen te definiëren. Laten we deze Glurpsen noemen.

Definitie
De verzameling van Glurpsen is de kleinste verzameling zodat:
(i) $(\triangle)$ is een Glurps.
(ii) Als x een Glurps is, dan zijn ook $(x\triangle\triangle)$ en $(\Diamond xx\Diamond)$ Glurpsen.
(iii) Als x en y Glurpsen zijn, dan is ook $(x\triangle y)$ een Glurps.

Men kan nu laten zien dat elke Glurps slechts een één ontstaansgeschiedenis kan hebben. De relatie tussen een Blurps en zijn desambiguaties kunnen we nu recursief definiëren.

Definieer de relatie R als volgt:
(i) $R(\triangle, (\triangle))$.
(ii) Als $R(x, x')$ dan ook $R(x\triangle\triangle, (x'\triangle\triangle))$ en $R(\Diamond xx\Diamond, (\Diamond x'x'\Diamond))$.
(iii) Als $R(x, x')$ en $R(y, y')$ dan ook $R(x\triangle y, (x'\triangle y'))$.

Opgave 6
Ga na dat $R(\triangle\triangle\triangle, ((\triangle)\triangle\triangle))$ en $R(\triangle\triangle\triangle, ((\triangle)\triangle(\triangle)))$.

Andersom kunnen we een functie f definiëren die aan elke Glurps de bijbehorend Blurps toevoegt:
(i) $f((\triangle)) := \triangle$.
(ii) $f((x\triangle\triangle)) := f(x)\triangle\triangle$, $f((\Diamond xx\Diamond)) := \Diamond f(x)f(x)\Diamond$.
(iii) $f((x\triangle y)) := f(x)\triangle f(y)$.

Opgave 7
Ga na dat $f(((\triangle)\triangle\triangle)) = f(((\triangle)\triangle(\triangle))) = \triangle\triangle\triangle$.

Omdat Glurpsen niet ambigu zijn is onze definitie een correcte definitie van een functie.

Recursie over de natuurlijke getallen

Natuurlijke getallen hebben unieke ontstaansgeschiedenissen dus kunnen we met recursie functies over de natuurlijke getallen definiëren. Ik geef een aantal voorbeelden:

Opgave 8
Definieer:
(i) $f_m(0) := m$ (ii) $f_m(n+1) := f_m(n) + 1$

Ga na: $f_m(n) = m + n$.

Opgave 9
Definieer:
(i) $g_m(0) := 0$ (ii) $g_m(n+1) := g_m(n) + m$

Ga na: $g_m(n) = m \cdot n$.

Opgave 10
Definieer:
(i) $h_m(0) := 1$ (ii) $h_m(n+1) := h_m(n) \cdot m$

Ga na: $h_m(n) = m^n$.

Opgave 11
Definieer:
$(0)! := 1$ $(n+1)! := (n)! \cdot (n+1)$

Ga na dat $(n)!$ het aantal manieren is waarop je n verschillende objecten op volgorde kunt leggen. (Bijvoorbeeld: je kunt a, b en c in de volgende volgordes zetten: abc, acb, bac, bca, cab, cba: 6 manieren dus en $(3)! = 6$.)

Opgave 12
Definieer:
(i) $\varphi_0 := p$ (ii) $\varphi_{n+1} := (\varphi_n \wedge q)$

Wat is φ_5?

Recursie over L

Opgave 13
Definieer:
(i) $f(p) := 0$ voor alle atomen p.
(ii) $f(\neg\varphi) := f(\varphi)$
(iii) $f((\varphi \vee \psi)) := f((\varphi \wedge \psi)) := f((\varphi \to \psi)) := f((\varphi \leftrightarrow \psi))$
$:= f(\varphi) + f(\psi) + 2$

Ga na: $f(\varphi)$ is het aantal haakjes in φ.

Opgave 14
Definieer:
(i) $g(p) := 1$ voor alle atomen p
(ii) $g(\neg\varphi) := g(\varphi)$
(iii) $g((\varphi \vee \psi)) := g((\varphi \wedge \psi)) := g((\varphi \to \psi)) := g((\varphi \leftrightarrow \psi))$
$:= g(\varphi) + g(\psi)$

Ga na: $g(\varphi)$ is het aantal voorkomens van atomen in φ.

Opgave 15
Definieer:

(i) $h(p) := p$ voor alle atomen p
(ii) $h(\neg\varphi) := \neg h(\varphi)$
(iii) $h((\varphi \vee \psi)) := \neg(\neg h(\varphi) \wedge \neg h(\psi))$,
$h((\varphi \wedge \psi)) := (h(\varphi) \wedge h(\psi))$,
$h((\varphi \to \psi)) := \neg(h(\varphi) \wedge \neg h(\psi))$,
$h((\varphi \leftrightarrow \psi)) := (\neg(h(\varphi) \wedge \neg h(\psi)) \wedge \neg(h(\psi) \wedge \neg h(\varphi)))$

Ga na: in $h(\varphi)$ komen alleen maar haakjes, atomen, $\neg$ en $\wedge$ voor.
Ga ook na: $h(\varphi)$ is logisch equivalent met φ.

Opgave 16
Definieer met recursie: het aantal linkerhaakjes in φ.

Opgave 17
Definieer met recursie: het aantal voorkomens van $\wedge$ in φ.

Opgave 18
Definieer met recursie: φ 'achterste voren gelezen'.
(Bijvoorbeeld $((p \wedge q) \vee r)$ achterstevoren gelezen is $(r \vee (q \wedge p))$.)

Opgave 19
Definieer met recursie: het resultaat van het vervangen van elk atoom p in φ door $\neg\neg p$.

EXTRA OPGAVEN

Opgave 20
Geef een inductieve definitie van de verzameling der natuurlijke getallen n met $n \geq 5$.

Opgave 21
Beschouw voor een natuurlijk getal $n \geq 1$ de uitspraak
$P(n) :=$ in elke groep van n meisjes hebben alle meisjes even lang haar
Als we om ons heen kijken, zien we dat $P(n)$ niet waar is. Waar zit dus de fout in het volgende bewijs van $P(n)$ voor alle $n \geq 1$:

- $P(1)$, want dan bestaat de groep maar uit 1 meisje

- Stel $P(x)$ en neem een groep van $x + 1$ meisjes. Stuur een van meisjes, zeg Sandra, even uit de groep. De overige meisjes vormen een groep van x meisjes, en hebben dus even lang haar (IH). Haal nu Sandra terug in de groep, en stuur een ander meisje uit de groep. Weer hebben we nu een groep van x meisjes, waaronder Sandra. Sandra heeft dus even lang haar als de andere meisjes. Dus in de complete groep van $x + 1$ meisjes hebben alle meisjes even lang haar: $P(x + 1)$.

Opgave 22
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt
$3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4 \cdot n^2 - n$

Opgave 23
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt $1/2 + 1/6 + \cdots + 1/(n^2 + n) = n/(n + 1)$

Opgave 24
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal n is $n^5 - n$ deelbaar door 10

Opgave 25
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt
$1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n \geq \ln(n + 1)$

Opgave 26
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal n is $n^3 + 2n$ deelbaar door 3

Opgave 27
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal $n \geq 5$ is $2^n > n^2$

Opgave 28
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal n is $n < 2^n$

Opgave 29
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal n is $3^n + 7^n - 2$ deelbaar door 8

Opgave 30
Toon aan: voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt
$1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \cdots + 1/\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$

Opgave 31
Bedenk een formule voor $2 + 6 + \cdots n(n+1)$ en bewijs vervolgens dat deze klopt voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$.

Opgave 32
Een spel begint met $n > 1$ pionnen. Vooraf wordt een getal m vastgesteld met $1 \leq m < n$. Spelers A en B gooien om beurten hoogstens m pionnen om (telkens minimaal 1 pion). Winnaar is degene die de laatste pion(nen) omgooit.
Bewijs dat de beginner kan winnen, dan en slechts dan als n geen veelvoud van m is.
Aanwijzing: stel $n = k(m+1) + r$ met $0 \leq r \leq m$ en pleeg inductie naar k.

Opgave 33
Een spel wordt gespeeld met twee stapels fiches, n_1 fiches op de ene stapel en n_2 fiches op de andere stapel. Spelers A en B mogen om beurten fiches van één van de stapels pakken, minstens 1 en maximaal alle fiches van een stapel. Winnaar is degene die de laatste fiches pakt.
Bewijs: de beginner kan winnen dan en slechts dan als $n_1 \neq n_2$.
Aanwijzing: inductie naar $n_1 + n_2$.

Opgave 34
De 'Torens van Hanoi' of 'Torens van Brahma'.
Gegeven zijn n ronde schijven met een gat in het midden. Geen twee schijven hebben dezelfde diameter. Er zijn drie pinnen, A, B en C. Aanvankelijk liggen alle schijven naar grootte gerangschikt op pin A (de grootste schijf onder). Men mag telkens de bovenste schijf van een pin halen en op een andere pin plaatsen, maar nooit mag een schijf op een kleinere schijf worden geplaatst.
Toon aan dat het mogelijk is om alle schijven uiteindelijk op pin C te krijgen.

Opgave 35
Maak een inductieve definitie van de verzameling van strings op alfabet $\{a, b\}$ waarin de substring bb niet voorkomt.

Opgave 36
Maak een inductieve definitie van de verzameling van strings op alfabet $\{a, b\}$ die er achterstevoren hetzelfde uitzien (z.g. palindromen, bijvoorbeeld 'abba').

Opgave 37
Bedenk en *bewijs* een eigenschap voor de elementen van de taal L waaruit blijkt dat $)p \wedge q($ niet in L zit.

Opgave 38
De verzameling Pluseqs is de kleinste verzameling zodat
(i) $=$ is een Pluseq
(ii) als x een Pluseq is, dan ook $+x$, $x+$ en $1x1$

geef enige voorbeelden van Pluseqs. Kun je een zinnige interpretatie geven aan de Pluseqs?

Opgave 39
De verzameling (niet lege) Binaire Strings is de kleinste verzameling zodat
(I) 0 en 1 zijn Binaire Strings
(II) als x een Binaire String is dan ook $0x$ en $1x$.
Definieer met recursie voor Binaire Strings x de functies $\ell(x)$, de lengte van x, en $\text{val}(x)$, de waarde van x beschouwd als een binaire notatie. We nemen als waarde voor bjvoorbeeld 0010 gewoon 2. Aanwijzing: gebruik ℓ als hulpfunctie.

Opgave 40
Deze opgave kan men interpreteren als de Poolse notatie van rekenkundige bewerkingen, waarin +ab betekent a+b en ×ab betekent a×b en ×+abc betekent (a+b)×c. Hierbij worden × en + gezien als functiesymbolen van ariteit 2 (d.w.z. gedefinieerd op 2-tallen) en zijn a, b, c constanten (zij hebben ariteit 0).

Bezie een alfabet A en een functie `Ar` van A naar de natuurlijke getallen (inclusief 0). De 'letters' van A zijn op te vatten als functiesymbolen met inbegrip van constanten. `Ar` geeft de bijbehorende ariteiten. De verzameling T van termen is de kleinste verzameling zodat voor elke a in A:
(i) als $\texttt{Ar}(a) = 0$ dan is a in T
(ii) als $\texttt{Ar}(a) = n > 0$ en $t_0, \ldots, t_{n-1}$ in T zijn, dan is $at_0 \ldots t_{n-1}$ in T.
Er worden geen haakjes en commas gebruikt!

Bewijs de volgende beweringen:
1. Het aantal letters in een term is 1 plus de som van de ariteiten van die letters.
2. Voor iedere finale substring van een term is het aantal letters minstens gelijk aan 1 plus de som van de ariteiten.
3. Geen echte initiële substring van een term is een term.
4. Er is maar één manier waarop een term in het inductieve proces gegenereerd kan worden (unique reading).

APPENDIX

Ontstaansgeschiedenis en desambiguering

Het begrip 'één ontstaansgeschiedenis' (vakterm: unique reading) betekent niet meer of minder dan dat elk element slechts door toepassing van één productieregel vanuit uniek bepaalde 'voorgaande' elementen kan ontstaan. Dat wordt afgedwongen door bijvoorbeeld haakjes te gebruiken zoals bij de Glurpsen. De éénduidige ontstaanswijze is dan een loutere textuele kwestie, het heeft alleen met de vorm van de uitdrukking te maken: het is een *syntactische* kwestie. Een nadeel van deze vorm van desambiguering is dat Blurpsen en Glurpsen *verschillende* verzamelingen zijn.

Dat elk natuurlijk getal maar op één manier kan ontstaan, is in de bovenstaande presentatie (juist door de opmerking dat we al weten wat '+1' betekent) een gevolg van de betekenis van '$x + 1$': hier is het een *semantische* kwestie. Eigenlijk hebben we de natuurlijke getallen gedefinieerd als een deelverzameling van de bekend veronderstelde verzameling der complexe getallen.
Men kan syntactisch een verzameling NS definiëren door de twee regels
(i) 0 in NS, (ii) Als x in NS dan ook x+1 in NS
In dit geval bestaat NS uit de strings 0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, etcetera. De ons vertrouwde verzameling N van natuurlijke getallen, tesamen met de *interpretatiefunctie* die aan elke string in NS het bijbehorend natuurlijke getal toevoegt, is dan een *model* van NS. De éénduidige ontstaansgeschiedenis van elementen van NS wordt gegerandeerd doordat de productieregel (ii) alleen aan de rechterkant '+1' toevoegt.

Vaak zijn er verschillende inductieve definities mogelijk voor dezelfde verzameling. Zo kunnen we een deelverzameling M van de complexe getallen als volgt definiëren:
(I) 0 en 1 zijn in M
(II) als x en y in M dan ook $x + y$ in M

Voor de duidelijkheid herhalen we nog eens de definitie van N:
(i) 0 in N
(ii) Als x in N, dan is ook $x+1$ in N.

Het is duidelijk dat N een deelverzameling van M is (waarom?). Het wezenlijke onderdeel van het bewijs dat elk element van M in N zit, is aan te tonen dat:
als x en y in N, dan ook $x+y$ in N.

We tonen dit aan met volledige inductie over y. Preciezer zullen we aantonen

Lemma
Als x in N, dan geldt voor iedere y in N dat $x+y$ in N.

- Stel x in N
- We hebben $x+0$ in N omdat N een deelverzameling is van de complexe getallen, waarin $x+0=x$.
- Stel dat $x+y$ in N (IH). Volgens productieregel (ii) staat ons nu te bewijzen dat $x+(y+1)$ in N.

We hebben $(x+y)+1$ in N wegens (ii), maar $(x+y)+1=x+(y+1)$ omdat N een deelverzameling is van de complexe getallen. Dus $x+(y+1)$ in N. Met volledige inductie volgt nu het lemma.

Een ander mooi voorbeeld is de verzameling van (niet lege) binaire strings (zie opgave 39), die we ook zouden kunnen definiëren als de kleinste verzameling zodat
(I) 0 en 1 zijn binaire strings
(II) als x en y binaire strings zijn dan ook xy.

Deze definitie is ambigu, want bijvoorbeeld $xy=001$ kan ontstaan uit $x=00$ en $y=1$, maar ook uit $x=0$ en $y=01$.
Op de standaardmanier desambigueren (gebruiken van haakjes) heeft weer het nadeel dat we een andere verzameling strings krijgen. We zullen aantonen dat de definitie volgens opgave 39 dezelfde verzameling oplevert. Voor de duidelijkheid herhalen we die definitie nog eens:
(i) 0 en 1 zijn Binaire Strings
(ii) als x een Binaire String is dan ook $0x$ en $1x$.

Noem $BS1$ de verzameling die ontstaat uit (I) en (II), en $BS2$ de verzameling die ontstaat uit (i) en (ii). Dan is het duidelijk dat $BS2$ een deelverzameling is van $BS1$, en we willen nog aantonen dat ook $BS1$ een deelverzameling is van $BS2$, dus dat iedere z in $BS1$ ook in $BS2$ zit. Volgens (I) en (II) moeten we dus laten zien:
0 in $BS2$, 1 in $BS2$, als x en y in $BS2$ dan xy in $BS2$.
De eerste twee beweringen staan precies in (i), en de derde bewering tonen we aan met volledige inductie naar x, maar om verwarring te voorkomen gebruiken we andere letters:
voor iedere u in $BS2$ is uv in $BS2$, aangenomen dat v in $BS2$.
Hiervoor controleren we de productieregels van $BS2$.

- (i): $0v$ en $1v$ in $BS2$ volgens (ii), toegepast op v.
- (ii): Stel xv in $BS2$. De concatenatie $0xv$ van $0x$ en v is ook te verkrijgen als concatenatie van 0 en xv, en is dus in $BS2$ wegens (i), (ii) (toegepast op 0 en xv). Een analoge redenering toont aan dat $1xv$ in $BS2$.

Opgave 41
Toon aan dat in de definitie volgens (i) en (ii) elke binaire string een unieke ontstaansgeschiedenis heeft.

Wat gebeurt er precies bij recursie ?

Als voorbeeld nemen we de Binaire Strings van opgave 39. In plaats van val gebruiken we de afkorting V. Het recursief berekenen van $V(111)$ kan dan bijvoorbeeld als volgt.

$V(111) =$
$V(11) + 2^{\ell(11)} =$
$V(1) + 2^{\ell(1)} + 2^{1+\ell(1)} =$
$1 + 2^1 + 2^{1+1} =$
7

Bij een echte berekening op de computer gaat het tegenwoordig vooral om de tijd die het uitvoeren van een programma kost. De berekening daarvan is nogal ingewikkeld omdat verschillende operaties ook een verschillende hoeveelheid tijd kosten. Zo is een machtsverheffing veel tijdrovender dan een simpele optelling. Bovendien slaat de computer bij het in recursie gaan veel meer gegevens voor later gebruik op dan strikt noodzakelijk is: het programma weet vooraf niet wat er allemaal nodig kan zijn als het uit de recursive duik weer boven komt.
In dit speciale voorbeeld wordt de preciese gang van zaken vertroebeld omdat de functie ℓ ook recursief gedefinieerd is. Het is soms mogelijk om dit te vermijden door één nieuwe functie te maken die de verschillende oude functies als componenten heeft. Zo kunnen we in het onderhavige voorbeeld een functie G definiëren van de Binaire Strings naar de paren van gehele getallen:

$$G(x) = (\ell(x), \mathrm{val}(x)), \text{ waarbij dus } G(x)_0 = \ell(x) \text{ en } G(x)_1 = \mathrm{val}(x).$$

De recursieve definitie van $G(x)$ is dan:

$G(0) = (1, 0)$
$G(1) = (1, 1)$
$G(0x) = (1 + G(x)_0, G(x)_1)$
$G(1x) = (1 + G(x)_0, G(x)_1 + 2^{G(x)_0})$

De berekening van $G(111)$ verloopt nu als volgt:

$G(111) =$
$(1 + G(11)_0, G(11)_1 + 2^{G(11)_0}) =$
$(1 + 1 + G(1)_0, G(1)_1 + 2^{G(1)_0} + 2^{1+G(1)_0}) =$
$(2 + 1, 1 + 2^1 + 2^{1+1}) =$
$(3, 7)$