LIEGROEPEN OPGAVEN

Gerard 't Hooft

Spinoza Instituut
Postbus 80.195
3508 TD Utrecht

e-mail: `g.thooft@phys.uu.nl`
`internet: http://www.phys.uu.nl/~thooft/`

Opgaven behorende bij het college Liegroepen 2003.

May 2, 2003

1. Colleges 14 maart en 19 maart.

Beschouw de matrices A die twee rijen en twee kolommen bevatten (2×2 -matrices), en uitsluitend reële coëfficienten. We eisen vervolgens dat A orthogonaal is ($A\tilde{A} = \mathbb{I}$), en dat $\det(A) = 1$.

a. Laat zien dat deze matrices een groep vormen, en dat één parameter (de draaiïngshoek) volstaat om zo'n matrix vast te leggen. We noemen die groep $SO(2)$.

b. Laat zien dat deze matrices commuteren: twee matrices van dit type, A en B, voldoen aan $[\,A,\,B\,] = 0$. Zulke groepen heten *Abels*.

2. College 14 maart

Beschouw de definitie van een *groep* op blz. 8 van het diktaat. Een groep voldoet dus aan de vier axioma's die daar vermeld staan.

a. Leid af, strikt alleen gebruik makend van deze axioma's, dat de "links-inverse" R^{-1} die in punt 4 staat gedefiniëerd, tegelijk ook "rechts-inverse" is: $R\,R^{-1} = \mathbb{I}$ (Hint: Beschouw $R^{-1}\,R\,R^{-1}$ en gebruik dat ook R^{-1} een inverse heeft).

b. Bewijs dat het eenheidselement ook "rechts-eenheidselement" is: $R = R\,\mathbb{I}$ voor iedere R (Hint: vermenigvuldig rechts met $R^{-1}\,R$)

3. College 19 maart

Laat $R_{(1)}$ een draaiing zijn van $90°$ rond de z-as en $R_{(2)}$ een draaiing van $45°$ rond de x-as.

a. Schrijf de bijbehorende matrices op.

b. Bereken de produktmatrix $R_{(3)} = R_{(2)}\,R_{(1)}$.

c. De matrix $R_{(3)}$ kan eveneens opgevat worden als een draaiing van een hoek φ rond een as $(a_1,\,a_2,\,a_3)$. Laat zien dat

$$\mathrm{Tr}\,(R_{(3)}) = 1 + 2\cos\varphi\,, \tag{3.1}$$

en bereken de hoek φ.

d. De coördinaten van de as kunnen gevonden worden door het *antisymmetrische deel* van $R_{(3)}$ te beschouwen, zie formule (3.10) van het diktaat. Vind de richting van deze draai-as.

e. Controleer dat de lengte van de as inderdaad de sinus van de draaihoek oplevert.

4. College 21 maart.

Bestudeer Appendix D: De Campbell-Baker-Hausdorff formule. Deze stelt dat indien er twee matrixen A en B zijn gegeven, er een matrix C bestaat, zodanig dat

$$e^A\, e^B = e^C \ , \tag{4.1}$$

en dat C geschreven kan worden als een machtreeks in A en B die uitsluitend *commutatoren* bevat, en geen producten.

a. Laat zien dat, als we complexe getallen toestaan, er *meerdere* matrixen C_i zijn zodanig dat (4.1) geldt.
Hint: breng C op diagonaalgedaante en tel $2\pi i$ op bij één van de eigenwaarden.

b. Er zijn diverse manieren om de stelling te bewijzen. In plaats van formule (D.2) kunnen we ook definiëren

$$e^{C(x)} = e^{xA}\, e^B \ . \tag{4.2}$$

Gebruik dezelfde methode als in de Appendix om af te leiden dat

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} \quad = \quad \{A, \frac{C}{1-e^{-C}}\} \quad = \quad A + \tfrac{1}{2}[A,C] + \tfrac{1}{12}[[A,C],C] + \cdots \ . \tag{4.3}$$

c. Gebruik dit resultaat om de termen genoemd in (D.29) te berekenen.

Deze opgave is wat moeilijker dan wat we op het tentamen zullen vragen. De afleiding van de CBH formule behoeft niet te kunnen worden gereproduceerd.

5. College 21 maart

Beschouw de behandeling op pagina 17 van het diktaat, maar nu toegepast op orthogonale draaiingen in een *vier*-dimensionale ruimte. We hebben dus vectoren $(x,\, y,\, z,\, u)$ die met orthogonale 4×4 -matrixen worden gedraaid.

a. Laat zien dat er 6 lineair onafhankelijke generatoren zijn. We kunnen ze $L_1, \cdots, L_6$ noemen. Een 4×4 -matrix R kan dus geschreven worden als

$$R = \exp\Big(i \sum_{k=1}^{6} \alpha_k\, L_k\Big) \tag{5.1}$$

b. Maak nu een lijst van de struktuurconstanten $c_{ij}^{\,k}$.

6. College 21 maart.

a. Leid de vergelijking (3.32) (zie diktaat) voor de struktuurconstanten $c_{ij}^{\,m}$ af.

b. Laat zien dat, als we aannemen dat L_i hermitisch zijn, de struktuurconstanten *zuiver imaginair* zijn. Laat voorts zien dat deze constanten antisymmetrisch zijn in de indices
i en j: $c_{ij}^{\,m} = -c_{ji}^{\,m}$.

c. Voer nu de z.g. *metrische tensor* g_{ij} in (we gebruiken sommatieconventie):

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} c_{ik}^{\,m}\, c_{mj}^{\,k} \; . \tag{6.1}$$

Laat zien dat g_{ij} symmetrisch is: $g_{ij} = g_{ji}$.

d. Laat zien (met behulp van (3.32)) dat de 'genormeerde struktuurconstanten', $\tilde{c}_{kij} = g_{km} c_{ij}^{\,m}$ volledig antisymmetrisch zijn:

$$\tilde{c}_{kij} = \tilde{c}_{ijk} = -\tilde{c}_{kji} \; . \tag{6.2}$$

Dikwijls *normeert* men de L_i zodanig dat $g_{ij} = \delta_{ij}$.

7. College 28 maart.

Beschouw nogmaals de groep van orthogonale transformaties in 4 dimensies. De 'elementaire' representatie wordt gevormd door de 4-vectoren zelf. De matrixen R en D zijn dan gewoon dezelfde. We noemen dit de **4** representatie. We schrijven de componenten van de 4-vector als x^μ, $\mu = 1, 2, 3$ of 4.

a. Beschouw nu de 16-dimensionale ruimte opgespannen door het produkt van twee zulke 4-vectoren. We schrijven $A^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \cdots, 4$. Geef aan hoe een matrix D er uitziet als onder een rotatie

$$A^{\mu\nu} \to R^{\mu\alpha} R^{\nu\beta} A^{\alpha\beta} \; . \tag{7.1}$$

b. Deze **16** representatie is echter niet irreducibel. Laat zien dat de twee deelruimtes opgespannen door de *symmetrische* tensoren $A^{\mu\nu}$, waarvoor geldt $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, en die van de *antisymmetrische* tensoren, $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, invariante deelruimtes zijn, waarvan de dimensies resp. 10 en 6 zijn.

c. Laat zien dat de 10-dimensionale representatie nog verder kan worden opgesplitst (door te kijken naar het *spoor* $A^{\mu\mu}$: $\mathbf{10} = \mathbf{9} \oplus \mathbf{1}$.

d. Maar ook de antisymmetrische **6** kan worden opgesplitst. Beschouw twee soorten tensoren:

$$A_+^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_+^{\alpha\beta}\ , \tag{7.2}$$
$$A_-^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_-^{\alpha\beta}\ , \tag{7.3}$$

om vast te stellen dat er twee irreducibele representaties zijn: $\mathbf{6} = \mathbf{3}_L \oplus \mathbf{3}_R$. Later zullen we zien dat $\mathbf{3}_L$ en $\mathbf{3}_R$ niet unitair equivalent zijn.

8. Bij College 2 april

Beschouw de generatoren L_i van de draaiingen zoals gegeven in formule (3.14) van het diktaat.

a. Deze genereren wat we noemen de 'adjoint representation' van de groep $SO(3)$. Vind de drie eigenwaarden $m = -1,\ 0,\ +1$ van L_3, en de bijbehorende eigenvectoren (in de basis waarin (3.14) is opgesteld), die we $|m\rangle$ zullen noemen.

b. Construeer de matrices L_+ and L_-, en bestudeer hoe deze werken op de toestanden $|m\rangle$.

c. Controleer of U inderdaad $|m{\pm}1\rangle$ krijgt, met de normeringsfactoren $\sqrt{2 - m(m \pm 1)}$ zoals verwacht volgens hoofdstuk 5.

d. Bereken de Casimir operator $\sum_i L_i^2$ en controleer daarmee of de waarde van het quantumgetal ℓ inderdaad 1 is.

9. Bij College 2 april

Deze opgave is wederom wat moeilijker. Het is een voorproefje van een procedure die later in het college ook verder zal worden uiteengezet.

Een representatie A van $SO(3)$ heeft basiselementen ψ_α^A, $\alpha = 1, \cdots, N_A$, en een representatie B heeft basiselementen ψ_κ^B, $\kappa = 1, \cdots, N_B$. We beschouwen de produkt-representatie $A \otimes B$ die als basiselementen de produkten $\psi_\alpha^A \psi_\kappa^B$ heeft. De dimensie van deze representatie is dus $N_A\, N_B$.

a. Laat zien dat de generatoren voor deze representatie geschreven kunnen worden als $I_i^{A\otimes B} = I_i^A + I_i^B$, waar I_i^A alleen werkt op de indices α van representatie A en I_i^B alleen op de indices κ van representatie B.

b. Laat zien dat $[I_i^A,\, I_j^B] = 0$. Nog steeds geldt $[I_i^A,\, I_j^A] = i\varepsilon_{ijk}I_k^A$ en $[I_i^B,\, I_j^B] = i\varepsilon_{ijk}I_k^B$.

c. Laat zien dat de operatoren $I_i^{A\otimes B}$ weer aan de juiste commutatierelaties voldoen. Als we de superscript $A\otimes B$ even weglaten: $[I_i,\, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k$.

d. We beschrijven de basiselementen van $A\otimes B$ als $|m^A, m^B\rangle$. Hoe werken nu de operatoren $I_\pm$ op deze basis?

e. De nieuwe representatie $A\otimes B$ is echter niet irreducibel. Beschouw de waarden die $m^{A\otimes B}$ kan aannemen en laat daarmee zien dat de maximale waarde die $\ell^{A\otimes B}$ kan aannemen gelijk is aan $\ell^A + \ell^B$.

f. Neem het geval $\ell^A = \frac{5}{2}$ en $\ell^B = \frac{3}{2}$. Laat zien dat er slechts één toestand is met $m^{A\otimes B} = 4$. Deze moet wel $\ell^{A\otimes B} = 4$ hebben (overtuig U hiervan door I_+ op deze toestand te laten werken). Deze duiden we aan als $|\ell = 4,\; m = 4\rangle$. Hoeveel basiselementen zijn er met $m^{A\otimes B} = 3$, met $m^{A\otimes B} = 2$, etc. ?

g. Hier nu laten we I_- op werken. Construeer zo de toestand $|\ell = 4,\; m = 3\rangle$. Laat zien dat deze gelijk is aan $\sqrt{\frac{5}{8}}\,|\frac{3}{2},\, \frac{3}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}\,|\frac{5}{2},\, \frac{1}{2}\rangle$. Waarom is nog steeds $\ell = 4$?

h. Er is nog een toestand met $m^{A\otimes B} = 3$ die hier loodrecht op staat. Construeer deze toestand en laat zien dat dit $|\ell = 3,\; m = 3\rangle$ is.

i . Zo kan men alle toestanden $|\ell,\, m\rangle$ vinden. Als we representaties aanduiden met hun dimensie $N = 2\ell + 1$, laat dan zien dat $\mathbf{4}\otimes\mathbf{6} = \mathbf{3}\oplus\mathbf{5}\oplus\mathbf{7}\oplus\mathbf{9}$. Algemeen: $\ell^{A\otimes B} = |\ell^A - \ell^B|, \cdots, \ell^A + \ell^B$. Laat zien dat de som van de dimensies dan klopt.

10. Bij College 4 april.

a. Laat zien dat 2×2-matrices X van de vorm $\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$, waarbij a an b willekeurige complexe getallen zijn, een groep vormen doordat ze aan de axioma's van blz. 8 voldoen.

b. Laat zien dat dat ook zo is als we aan a en b de conditie opleggen dat $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

c. Laat zien dat deze conditie overeenkomt met $\det(X) = 1$.

11. Bij College 4 april.

We beschouwen analytische functies f van twee complexe variablen φ^1, φ^2. De operatoren $L_i,\; i = 1, 2, 3,$ worden gedefiniëerd als in vgl. (6.33), t.w.:

$$L_i = -\tfrac{1}{2}(\tau_i)^\alpha{}_\beta\varphi^\beta\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha}\ . \tag{11.1}$$

Bewijs dat deze aan de commutatieregels van $SU(2)$ voldoen:

$$[L_i,\, L_j] = i\,\varepsilon_{ijk}L_k\ . \tag{11.2}$$

Let op het min-teken in de definitie!

12. Bij College 4 april

In het college werd, in tegestelling tot het diktaat, onderscheid gemaakt tussen bovenindices ('superscripts') zoals in φ^α en onderindices ('subscripts'), zoals in $\varphi_\alpha = (\varphi^\alpha)^*$. De indices in de τ matrices worden geschreven als $(\tau_i)^\alpha{}_\beta$, in de delta-functie als δ^α_β, en in de invariante tensor ε als $\varepsilon_{\alpha\beta}$ en $\varepsilon^{\alpha\beta}$. In het dictaat worden $\varepsilon_{\alpha\beta}$ en $\varepsilon^{\alpha\beta}$ geschreven als $i\tau_2$. Bij *sommaties*, $\sum_\alpha(\cdots^\alpha\cdots{}_\alpha)$ moet altijd één van die indices boven staan en één onder. Controleer nu bij alle bewerkingen op blzz. 34—37 welke indices boven staan en welke onder.

13. Bij College 9 april

Beschouw een opstelling zoals in hoofdstuk 7, maar nu voor de verstrooiïng van een deeltje met spin 1 tegen een bolsymmetrische target. We schrijven de representatie in de basis waarin L_z gediagonaliseerd is, dus

$$\psi^{+1} = f(\vec{r})\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \,, \qquad \psi^{0} = f(\vec{r})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \,, \qquad \psi^{-1} = f(\vec{r})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \,. \tag{13.1}$$

Definiëer nu de verstrooiïngsfunctie $F(\theta)$ als de 3×3-matrix

$$\begin{pmatrix} f_{++}(\theta) & f_{+0}(\theta) & f_{+-}(\theta) \\ f_{0+}(\theta) & f_{00}(\theta) & f_{0-}(\theta) \\ f_{-+}(\theta) & f_{-0}(\theta) & f_{--}(\theta) \end{pmatrix} \,. \tag{13.2}$$

a. Schrijf de matrix op die infinitesimale draaiïngen rond de x-as in deze basis genereert: $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$.

b. De draaiing over een eindige hoek ξ, ofwel $\exp(i\xi L_x)$, vinden we door (3.10) toe te passen:

$$\exp(i\xi L_x) = \mathbb{I} + (\cos\xi - 1)L_x^2 + i\sin\xi\, L_x \,. \tag{13.3}$$

Laat zien dat dit volgt uit $L_x^{2n+1} = L_x$ en bereken $\exp(i\xi L_x)$.

c. Leid nu af hoe $F(\theta)$ onder deze draaiïng transformeert.

d. Wat is nu de algemeen te verwachten hoekafhankelijkheid van f_{++}, f_{00} en f_{--}?

e. Bereken nu de hoekverdelingen voor verstrooiïng van deeltjes met $S_z = 1,\, 0$, en -1. Uit pariteitssymmetrie kunt U wellicht verdere beperkingen vinden voor de, anders willekeurige, parameters in dit rekenresultaat.

f. Hoe onderscheidt men dus nu deeltjes met spin $\frac{1}{2}$ van deeltjes met spin 1?

14. Bij College 11 april.

Het hier volgende is in het college behandeld, maar staat niet in het diktaat. We vragen U dus het resultaat te reconstrueren:

Het N^* deeltje heeft, net als de gewone nucleonen $N = (p, n)$ isospin $\frac{1}{2}$. Het is zwaar genoeg om, net als de Δ deeltjes, uiteen te vallen in een nucleon en een pion. De ontstane toestanden $|N, \pi\rangle$ moeten nu totale isospin $\frac{1}{2}$ hebben. Van de toestanden genoemd in formule (8.6) zoeken we nu die combinaties die $I^{\text{tot}} = \frac{1}{2}$ hebben en $I_3 = +\frac{1}{2}$.

a. Zoek de twee basiselementen met $I_3 = +\frac{1}{2}$. Één combinatie hiervan heeft dus $I^{\text{tot}} = \frac{3}{2}$ en één combinatie die daar loodrecht op staat heeft $I^{\text{tot}} = \frac{1}{2}$. Waarom staan die twee combinaties loodrecht op elkaar?

b. Laat zien dat de $I^{\text{tot}} = \frac{1}{2}$ toestand moet voldoen aan $I_+|\psi\rangle = 0$. Bereken nu deze toestand.

c. De toestand $I^{\text{tot}} = \frac{1}{2}$, $I_3 = -\frac{1}{2}$ krijgen we door op het resultaat van (b) nu I_- op los te laten. Bereken deze toestand.

d. Een alternatieve methode is de vergelijking $I_-|\psi\rangle = 0$ op te lossen. Laat zien dat dat hetzelfde resultaat oplevert, op een mogelijke fase-factor (of minteken) na.

e. Bereken nu de vervalswaarschijnlijkheden voor

$$\begin{aligned} N^{*+} &\to p + \pi^0 \ , \qquad & N^{*+} &\to n + \pi^+ \ , \\ N^{*0} &\to p + \pi^- \ , \qquad & N^{*0} &\to n + \pi^0 \ . \end{aligned} \tag{14.1}$$

Merk het verschil op met het Δ verval, vgl. (8.14).

15. Bij College 11 april.

Tevens is op het college behandeld het $K \to 2\pi$ verval. Het K_S^0 deeltje kan in twee pionen uiteenvallen, en doet dat in de verhouding $(\pi^+\pi^-) : (2\pi^0) \approx 2 : 1$. We vragen ons af welke isospin-toestand dat is. Beschouw de 9 $|\pi,\, \pi\rangle$ toestanden.

a. Leid af, gebruik makend van de operatoren I_+ en I_-, dat de $I^{\text{tot}} = 2$, $I_3 = m$ toestanden, met $m = 2, 1, 0, -1, -2$, zijn:

$$\begin{aligned} |2,\ 2\rangle &= |\pi^+,\, \pi^+\rangle \\ |2,\ 1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^+,\, \pi^0\rangle + |\pi^0,\, \pi^+\rangle\Big) \\ |2,\ 0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}\Big(|\pi^+,\, \pi^-\rangle + 2|\pi^0,\, \pi^0\rangle + |\pi^-,\, \pi^+\rangle\Big) \\ |2,-1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\pi^0,\, \pi^-\rangle + |\pi^-,\, \pi^0\rangle\Big) \\ |2,-2\rangle &= |\pi^-,\, \pi^-\rangle \ , \end{aligned} \tag{15.1}$$

de $I^{\rm tot}=1,\ I_3=m$ toestanden zijn:

$$\begin{aligned}
|1,\ 1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt2}\Big(|\pi^+,\,\pi^0\rangle - |\pi^0,\,\pi^+\rangle\Big)\\
|1,\ 0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt2}\Big(|\pi^+,\,\pi^-\rangle - |\pi^-,\,\pi^+\rangle\Big)\\
|1,-1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt2}\Big(|\pi^0,\,\pi^-\rangle - |\pi^-,\,\pi^0\rangle\Big)\,,
\end{aligned}\tag{15.2}$$

en de $I^{\rm tot}=0,\ I_3=0$ toestand is:

$$|0,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt3}\Big(|\pi^+,\,\pi^-\rangle - |\pi^0,\,\pi^0\rangle + |\pi^-,\,\pi^+\rangle\Big)\tag{15.3}$$

b. Laat zien dat de waarneming consistent is met het vermoeden dat $I^{\rm tot}=0$.

c. De toestanden met $I^{\rm tot}=1$ zijn in feite uitgesloten omdat de (gewone) spin van K^0_S zowel als die van de pionen nul is. De pionen zijn bosonen, en daarom is de toestand na het uiteenvallen van het K deeltje bolsymmetrisch. Het min-teken is niet toegestaan. Laat zien dat het verval $K^+\to\pi^++\pi^0$ dus eindigt in een isospin 2 toestand. Dit verval blijkt een veel kleinere amplitude te hebben dan het K^0_S verval. Isospin is bij dit (zwakke) vervalsproces niet behouden, maar de natuur blijkt een sterke voorkeur te hebben voor het verval naar isospin 0. De (ingewikkelde) K-fysica gaan we niet verder behandelen.

16. Bij College 16 april.

Volgens de wetten van Kepler beweegt een planeet zich in een ellipsbaan met de zon in één der brandpunten. De halve lange as van een ellips noemen we a, de halve korte as b, en de afstand tussen een randpunt en het middelpunt van de ellips heet c. Er geldt $a^2=b^2+c^2$. Het feit dat de ellipsbaan volgt uit de wetten van Newton voor de klassieke mechanica weten we van de colleges klassieke mechanica. Dezelfde wetten gelden voor een klassiek electron dat draait rond een klassiek proton. We schrijven daarvoor de Hamiltoniaan (9.1). Dit is tevens de energie van het electron. Volgens Kepler is de totale energie in deze ellips dan $-e^2/2a$.

a. Leid nu af dat het totale impulsmoment L gelijk is aan

$$L = e\,b\sqrt{\frac{\mu}{a}}\ .\tag{16.1}$$

Kies daartoe één of meerdere speciale punten op de ellips.

Controleer de berekening op blz 48 waarme wordt aangetoond dat de Runge-Lenz vector in de tijd behouden is.

b. Kies weer één of meerdere punten in de baan om de Runge=Lenz vector uit te rekenen. Laat zien dat deze langs de lange as van de ellips wijst, en dat zijn lengte gelijk is aan c/a. Dit is tevens de *excentriciteit* ε van de ellips.

17. (16 en 23 april)

Stel dat we ook voor het quantummechanische geval formule (9.7) zouden gebruiken voor de definitie van $\vec{K}$ (dus niet de gesymmetriseerde vorm (9.16)). Laat zien dat $\vec{K}$ dan niet meer hermitisch is, en dat het *anti*-hermitische deel gelijk is aan $i\hbar\vec{p}$. Dit is zeker niet behouden in de tijd.

18. (16 en 23 april)

Het is niet moeilijk te bewijzen dat

$$\begin{aligned} [L_i,\, r_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} r_k \\ \text{en} \qquad [L_i,\, p_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k \; . \end{aligned} \tag{18.1}$$

Laat nu zien dat als voor twee willekeurige vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ beide de commutatierelaties met L_i zijn zoals (18.1), en als een andere operator R met alle L_i commuteert, dan gelden soortgelijke commutatierelaties ook voor de vectoren $\vec{C}$ en $\vec{D}$ die gedefiniëerd zijn volgens $\vec{C} = R\vec{A}$, en $\vec{D} = \vec{A} \times \vec{B}$, dus

$$\begin{aligned} [L_i,\, C_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} C_k \\ \text{en} \qquad [L_i,\, D_j] &= i\hbar\varepsilon_{ijk} D_k \; . \end{aligned} \tag{18.2}$$

Dit is het z.g. Wigner-Eckhart theorema. Hiermee hebben we in één klap (9.19) en (9.22) bewezen.

19. (16 en 23 april)

a. Controleer de berekeningen die leiden tot formules $[\vec{K},\, H] = 0$ (9.25) en $\vec{K} \cdot \vec{L} = 0$ (9.30) voor de quantummechanische Runge-Lenz vector (9.16).

b. Bewijs dat

$$(\vec{L} \times \vec{p}) \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) = -p^2 L^2 \; . \tag{19.1}$$

Let op dat er geen extra termen ontstaan door de commutatieregels correct te hanteren [1]

c. We berekenen nu $\vec{K}^2$ door $\vec{K}$ te schrijven als

$$\vec{K} = \frac{1}{\mu e^2}(\vec{L} \times \vec{p} - \hbar i \vec{p}) + \frac{\vec{r}}{r} \;=\; \frac{1}{\mu e^2}(-\vec{p} \times \vec{L} + \hbar i \vec{p}) + \frac{\vec{r}}{r} \; , \tag{19.2}$$

waarna we de ene uitdrukking met de andere vermenigvuldigen, gebruik makend van b. Bewijs nu (9.31).

[1] In het college werd de andere combinatie berekend, die wel extra termen oplevert.

20. College 23 april

Bekijk de quantumtoestanden van het waterstofatoom bij een gegeven n.

a. Laat zien dat zowel L_3^+ als L_3^- de waarden $-\frac{1}{2}(n-1),\ -\frac{1}{2}(n-1)+1,\ \cdots,\ \frac{1}{2}(n-1)$ aannemen.

b. Wat zijn nu de mogelijke waarden van $L_3 = L_3^+ + L_3^-$, en wat is de degeneratiegraad bij die waarden?

c. Leid hieruit af dat ℓ de heeltallige waarden $0,\ 1,\ \cdots\ n-1$ alle precies één keer aanneemt, volgens formule (9.46).

21. College 25 april

De fundamentele representatie van $SU(3)$ betreft de drie quarks,

$$\phi^\alpha \;=\; \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \;, \tag{21.1}$$

waarvan de eerste twee een doublet zijn onder isospin-$SU(2)$. De vreemdheid van u en d is 0, die van s is -1.

a. Geef aan welk patroon deze quarks vormen als we isospin tegen vreemdheid uitzetten zoals ook gedaan is in Figuren 5 en 6.

b. Als we aannemen dat Δ^- uit drie d quarks bestaat, D^{++} uit drie u quarks en Ω^- uit drie s quarks, bereken dan de elektrische lading van die quarks, en vergelijk het verkregen diagram met Figuur 6.

c. De **6** representatie wordt gegeven door de symmetrische tensoren $\phi^{\alpha\beta}$. Laat zien dat

$$\mathbf{6}_{\,\mathrm{SU(3)}} = (\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1})_{\,,\mathrm{SU(2)}}. \tag{21.2}$$

d. Laat zien dat dit een exotische representatie is, en geef de positie van deze deeltjes aan in het I_3 - S diagram.

22. College 25 april. Produktrepresentaties in $SU(3)$.

We willen weten hoe de produktrepresentatie $\mathbf{8}\otimes\mathbf{8}$ uiteenvalt in irreducibele representaties van $SU(3)$. We bekijken alleen het antisymmetrische gedeelte, $(\mathbf{8}\otimes\mathbf{8})_a$:

$$X^{ab} = -X^{ba}\;, \qquad a,\, b = 1,\, \cdots,\, 8\;. \tag{22.1}$$

a. Laat zien dat deze representatie 28 - dimensionaal is.

b. Laat zien dat we de representatie $\big((\mathbf{8}+\mathbf{1})\otimes(\mathbf{8}+\mathbf{1})\big)_a$ kunnen schrijven als een tensor $Y^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = -Y^{\beta\alpha}_{\delta\gamma}$, waarin de indices α, β, γ en δ alle waarden $1, \cdots, 3$ kunnen aannemen.

c. Laat zien dat deze representatie in twee stukken uiteenvalt met ieder 18 dimensies:

$$\begin{aligned} Y^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} &= Y^{+\,\alpha\beta}_{\ \ \gamma\delta} + Y^{-\,\alpha\beta}_{\ \ \gamma\delta} \;; \\ Y^{+\,\alpha\beta}_{\ \ \gamma\delta} &= Y^{+\,\beta\alpha}_{\ \ \gamma\delta} \;=\; -Y^{+\,\alpha\beta}_{\ \ \delta\gamma} \;, \\ \text{en} \qquad Y^{-\,\alpha\beta}_{\ \ \gamma\delta} &= -Y^{-\,\beta\alpha}_{\ \ \gamma\delta} \;=\; Y^{+\,\alpha\beta}_{\ \ \delta\gamma} \;. \end{aligned} \tag{22.2}$$

d. Gebruik nu $\varepsilon^{\gamma\delta\kappa}$ om de indices van Y^+ alle omhoog te krijgen. We hebben dan drie indices. Laat zien dat deze tensor uiteenvalt in een volledig symmetrische tensor en de rest. We hebben dus dat Y^+ uiteenvalt in een $\mathbf{10}$ en een $\mathbf{8}$.

e. Laat zien dat Y^- uiteen valt in een $\mathbf{8}$ en een $\overline{\mathbf{10}}$.

f. Concludeer dat

$$\big((\mathbf{8}+\mathbf{1})\otimes(\mathbf{8}+\mathbf{1})\big)_a = \mathbf{10}+\mathbf{8}+\mathbf{8}+\overline{\mathbf{10}} \;. \tag{22.3}$$

g. Leid nu af dat

$$(\mathbf{8}\otimes\mathbf{8})_a = \mathbf{10}+\mathbf{8}+\overline{\mathbf{10}} \;. \tag{22.4}$$