KWADRATISCHE VERGELIJKINGEN, HET GULDEN ZADELVLAK, EN DE REGELMATIGE VIJFHOEK.

Johan A.C. Kolk

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Met medewerking van Rogier Bos

Christelijk Gymnasium Utrecht
& Freudenthal Instituut, UU

Informatie

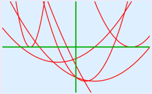
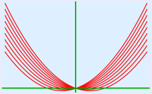
- tekst voordracht: `http://www.staff.science.uu.nl/~kolk0101/Links/Voordracht_NWD.pdf`
- alternatief tekst voordracht: zoek in Google op: johan kolk, kies Personal Homepage, kies Links, kies Voordracht NWD
- e-mail: j.a.c.kolk@uu.nl
- homepage: `http://www.staff.science.uu.nl/~kolk0101/`
- plaats: Nationale Wiskunde Dagen
- tijd: 05-02-2016, 14:00–15:00

Outline

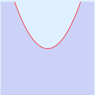
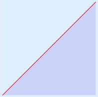
Onderwerp: Alle vergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$ met reële coëfficiënten a, b, c en reële nulpunten x.
Na deling door $a \neq 0$ schrijven we

$$x^2 + \mathbf{2}c_1x + c_2 = 0.$$

Alle grafieken onoverzichtelijk.

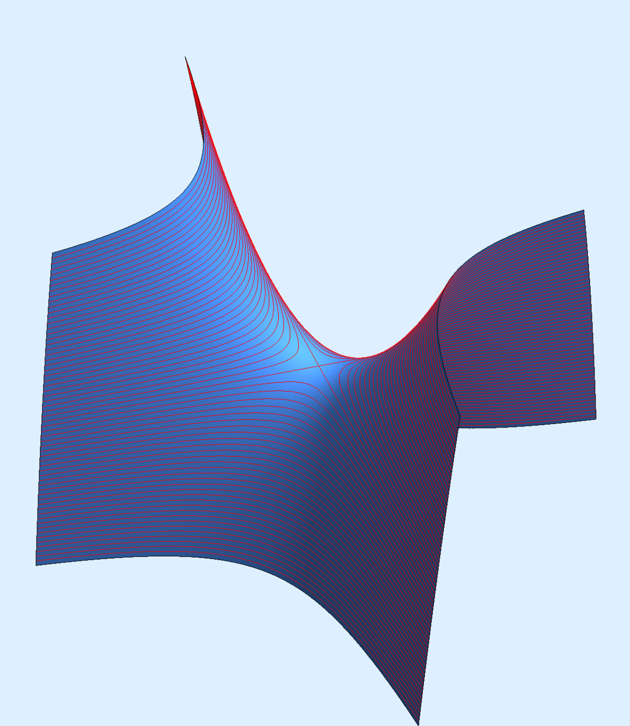



Coëfficiënten $c_1^2 \geq c_2$ of nulpunten $x_+ \geq x_-$ weinig informatie.

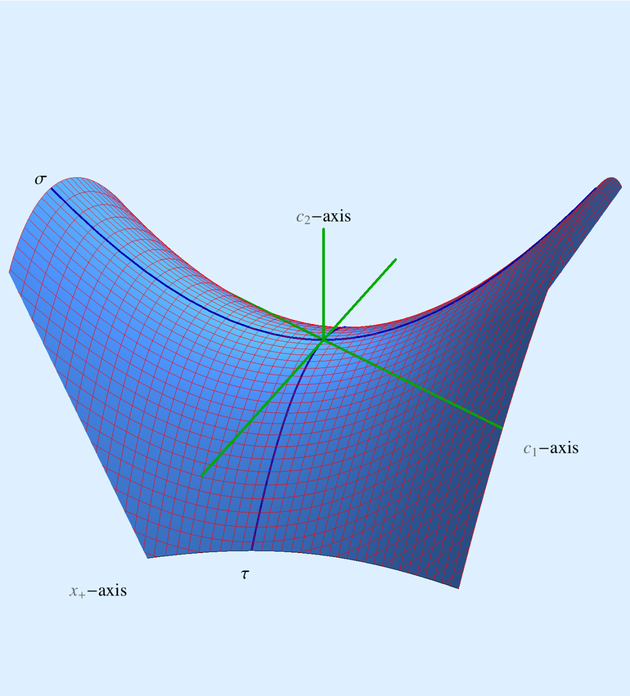



$x^2 + 2c_1x + c_2 = 0$ interessant indien beschouwd als vergelijking tussen x, c_1 en c_2 tegelijk, dus van oppervlak in $\mathbf{R}^3$.

Outline



Outline

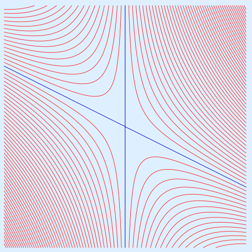


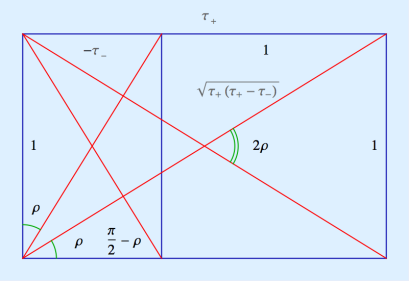
Outline

- Alle kwadratische vergelijkingen met reële coëfficiënten en nulpunten tegelijkertijd.
- Meer inzicht in gedrag van oplossingen en verrassende relaties met andere onderdelen van wiskunde.
- Technisch hulpmiddel: Viète formules.
  Oplossingen op zoek naar een probleem.
- Oppervlak in $\mathbf{R}^3$.
- Doorsnijding met vlakken:
  - Parabolen.
  - Lijnen.
  - Hyperbolen.
- Conclusie: Zadelvlak / Hyperbolische paraboloïde.

Outline

- Hoek tussen blauwe asymptoten van hyperbolen: 2ρ met $\tan 2\rho = 2$. Ook in **gulden rechthoek**.



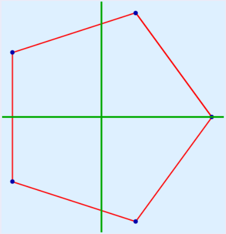


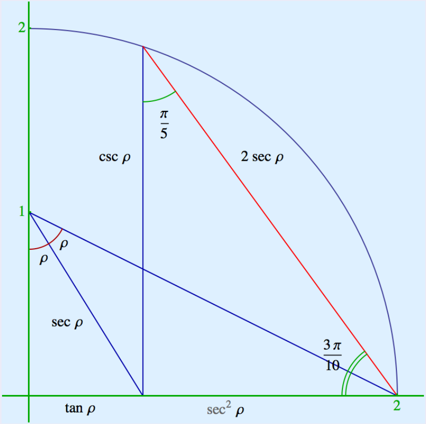
- $\tan\rho = \frac{1}{\tau_+} = -\tau_-$ met τ_+ **gulden snede**.

$$\frac{\tau_+}{1} = \frac{1}{\tau_+ - 1} \quad \Longrightarrow \quad \tau_\pm^2 - \tau_\pm - 1 = 0.$$

Outline

- Richmond's constructie van regelmatige vijfhoek.





KV's (= Kwadratische Vergelijkingen)

KV met reële "coefficiënten" c_1 en c_2

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + \mathbf{2}c_1\, x + c_2 = (x + c_1)^2 - (c_1^2 - c_2) \\ &= (x + c_1)^2 - (c_1^2 - c_2). \end{aligned}$$

Notatie is **niet-standaard**, maar maakt formules transparant.
Aanname: Reële nulpunten x_+ en x_- met $x_+ \geq x_-$.
Gegeven door **oplossingsformule** (met d voor "difference")

$$(c_1,\, c_2) \mapsto (x_+,\, x_-), \qquad x_\pm = -c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2} = -c_1 \pm d.$$

Dus

$$d = \sqrt{c_1^2 - c_2}.$$

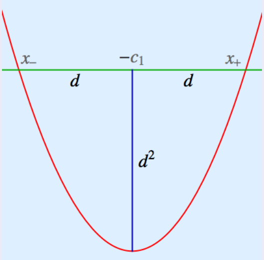
Maar ook

$$x_+ - x_- = -c_1 + d - (-c_1 - d) = 2d \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{1}{2}(x_+ - x_-).$$

Vb.

$$\begin{aligned} &x^2 - 2 \cdot 5x + 21 = x^2 - 10x + 21 = (x - 7)(x - 3) \\ &\Longrightarrow \qquad d = \sqrt{5^2 - 21} = 2 = \tfrac{1}{2}(7 - 3). \end{aligned}$$

KV's (= Kwadratische Vergelijkingen)



Vièteformules

Omkering: Druk (c_1, c_2) uit in (x_+, x_-).
Vièteformules:

$$c_1 = -\frac{1}{2}(x_+ + x_-), \qquad c_2 = x_+ x_-.$$

Bewijs: som-productmethode

$$(x-7)(x-3) = x^2 - 10x + 21 = x^2 - 2 \cdot 5x + 21$$

$$\Longrightarrow \qquad c_1 = -5 = -\tfrac{1}{2}(7+3) \qquad \text{en} \qquad c_2 = 21 = 7 \cdot 3.$$

Gevolg: oplossingsformule is trivialiteit:

$$\mathbf{x}_\pm = -\mathbf{c}_1 \pm \mathbf{d} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x}_+ + \mathbf{x}_-) \pm \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-).$$

Opgave

Bewijs de volgende beweringen.

- Als Δ discriminant van $x^2 + 2c_1\, x + c_2$, dan $d^2 = \frac{1}{4}\Delta$.
- Grafiek heeft top in $-(c_1, d^2)$.
- Bewijs Vièteformules mbv.
  - som-productmethode,
  - optelling en vermenigvuldiging van de oplossingsformules.

Parametrisatie Oppervlak

Parametrisatie (= parametervoorsteliing) van cirkel met straal r in (x, y)-vlak

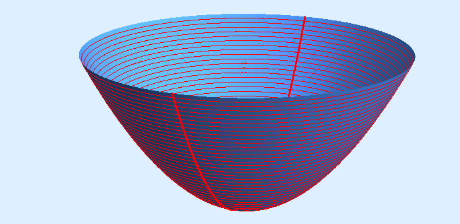
$$a \mapsto r(\cos a, \sin a) = (x, y).$$

Bij toename r, familie cirkels met toenemende straal

$$(a, r) \mapsto (r\cos a, r\sin a, r^2) = (x, y, z).$$

$a = 0$: $(r, 0, r^2) = (x, y, z)$. Parabool: $z = x^2$ en $y = 0$.
Vergelijking oppervlak (elliptische paraboloïde)

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 a + \sin^2 a) = r^2 = z.$$



Zadelvlak Q

***Q*. [Zadelvlak].** Beschouw nu KV als vergelijking in drie variabelen $(x, c_1, c_2) \in \mathbf{R}^3$ tegelijk.
Geeft oppervlak Q in $\mathbf{R}^3$, beschreven door:

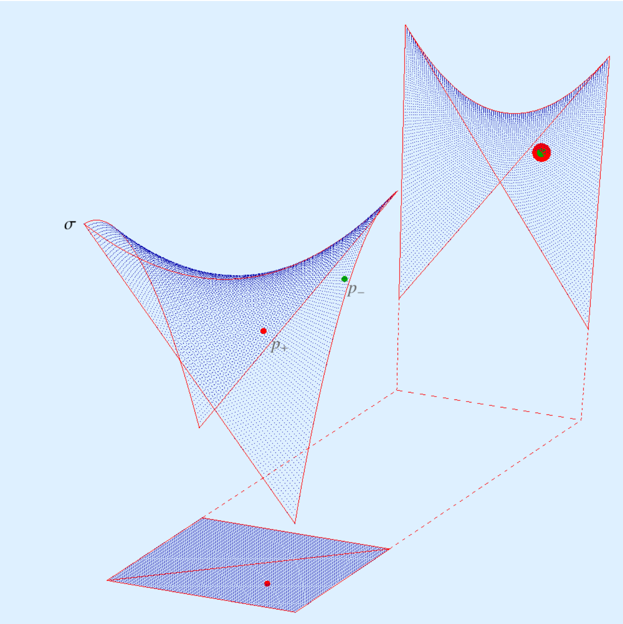
- vergelijking: $(x, c_1, c_2) \in Q \iff x^2 + 2c_1 x + c_2 = 0$,
- parametrisatie (= parametervoorstelling) met Viète:

$$\phi(x_+, x_-) = \Big(x_+, -\frac{1}{2}(x_+ + x_-), x_+ x_-\Big).$$

Immers, $\phi(x_+, x_-) = (x, c_1, c_2) \iff$

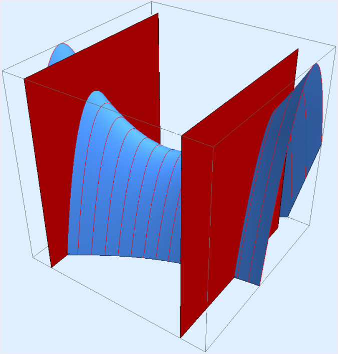
$$\begin{aligned} x^2 + 2c_1 x + c_2 &= x_+^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}(x_+ + x_-)\, x_+ + x_+ x_- \\ &= x_+^2 - x_+^2 - x_- x_+ + x_+ x_- = 0. \end{aligned}$$

$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x_\pm = {1 \atop -3}, \quad p_\pm = \left({1 \atop -3}, 1, -3\right) = (x_\pm, c_1, c_2),$
loodrechte projecties op (verschoven) (x_+, c_1)- en (c_1, c_2)-vlak.

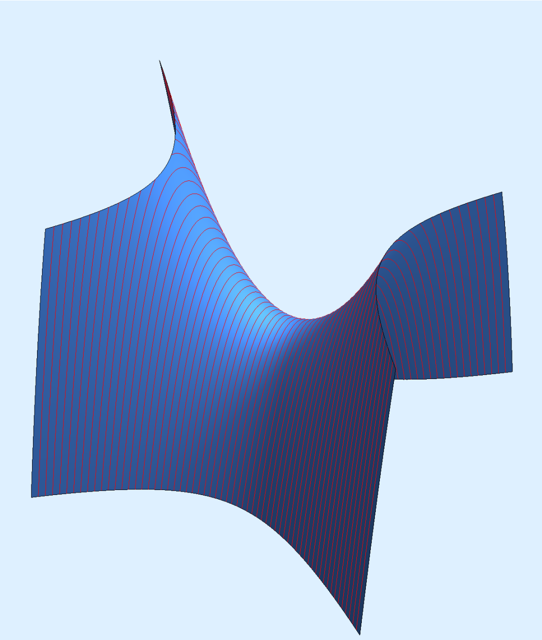


Snijden met vlak

Snijden van $Q \subset \mathbf{R}^3$ met (plat) vlak, is in feite hetzelfde als snijden van kromme in $\mathbf{R}^2$ met (rechte) lijn.
Lijn loodrecht op x-coördinaatas, en dus parallel aan y-as, wordt gegeven door $x = c$ en y willekeurig, met c constant.
En willekeurige lijn voldoet aan $ax + by = c$.
Evenzo staat vlak bestaande uit punten (x, c_1, c_2) met c_1 constant, loodrecht op c_1-as; en is dus parallel aan (x, c_2)-vlak.



Bergparabolen



Bergparabolen

$P_-(c_1)$. De doorsnijding van Q met het vlak waar c_1 constant.
Dan $P_-(c_1)$ een vlakke ruimtekromme op Q.
$x_+ + x_- = -2c_1$, dwz. $(x_+, x_-) = (x_+, -x_+ - 2c_1)$.
Daarom parametrisatie $P_-(c_1)$:

$$x_+ \mapsto \phi(x_+, -x_+ - 2c_1) = (x_+, c_1, -x_+^2 - 2c_1 x_+) = (x_+, c_1, c_2),$$

$$\text{dus} \qquad c_2 = -x_+^2 - 2c_1\, x_+ = -(x_+ + c_1)^2 + c_1^2.$$

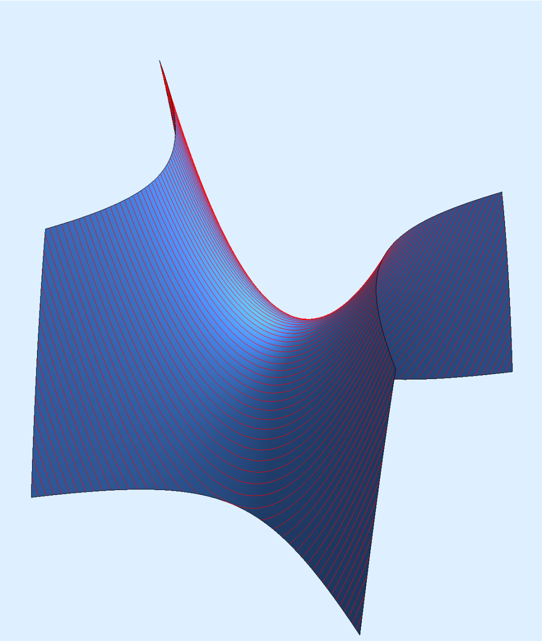
In (x_+, c_2)-coördinaten een **bergparabool** met top $(-c_1, c_1^2)$.

Een punt op één $P_-(c_1)$ beschrijft een KV waarvoor de som van de nulpunten gelijk is aan $-2c_1$.
Omgekeerd correspondeert elke dergelijke KV met hooguit twee punten op $P_-(c_1)$.

Opgave

- Reken zelf de parametrisatie van $P_-(c_1)$ na.

Dalparabolen



Dalparabolen

***P*$_+$(*d*).** Snijding van Q met vlak $x_+ + c_1$ constant, geeft punten met

$$x_+ - \frac{1}{2}(x_+ + x_-) = \frac{1}{2}(x_+ - x_-) = d$$

constant. Analoog aan voorgaande een **dalparabool** $P_+(d)$ met vergelijkingen

$$x_+ + c_1 = d \qquad \text{en} \qquad c_2 = c_1^2 - d.$$

De punten van $P_+(d)$ zijn alle KV's met voorgeschreven d, waarbij $d^2 = \frac{1}{4}$ maal de discriminant van KV.

Parabolen σ en τ

Speciale gevallen:

- $\boldsymbol{\tau} = P_-(0)$, met parametrisatie

$$\tau : x_+ \mapsto \phi(x_+, -x_+) = (x_+, 0, -x_+^2).$$

  Alle KV's met tegengestelde nulpunten.

- $\boldsymbol{\sigma} = P_+(0)$, met parametrisatie

$$\sigma : x_+ \mapsto \phi(x_+, x_+) = (x_+, -x_+, x_+^2).$$

  Alle KV's met $d = 0$, dus samenvallende nulpunten.

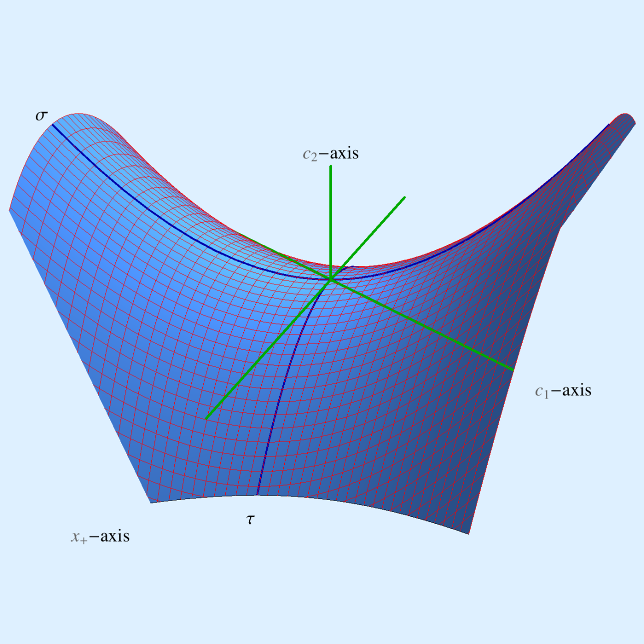
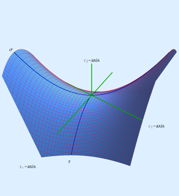


Figure: σ samenvallende nulpunten, τ tegengestelde nulpt, $\measuredangle \sigma\tau = \frac{\pi}{4}$

Punten



***$P_-(c_1) \cap P_+(d)$*. [Punt].** Doorsnijding van twee parabolen. $\phi(x_+, -x_+ - 2c_1) = \phi(x'_+, x'_+ - 2d)$ geeft $x_+ = x'_+$ en $-x_+ - 2c_1 = x_+ - 2d$; dus $x_+ = -c_1 + d$ en $x_- = -c_1 - d$.

$$\begin{aligned} \phi(-c_1 + d, -c_1 - d) &= (-c_1 + d,\, c_1,\, c_1^2 - d^2) \\ &= (-c_1,\, c_1,\, c_1^2) + (d,\, 0,\, -d^2) = \sigma(-c_1) + \tau(d). \end{aligned}$$

Vector som correspondeert met schrijven nulpunt x_+van KV als $x_+ = -c_1 + d$, maar ook als $x_+ = \frac{1}{2}(x_+ + x_-) + \frac{1}{2}(x_+ - x_-)$. Immers, elk punt van Q kan worden geschreven

$$\phi(\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-) = \sigma\Big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x}_+ + \mathbf{x}_-)\Big) + \tau\Big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-)\Big).$$

Lijnen

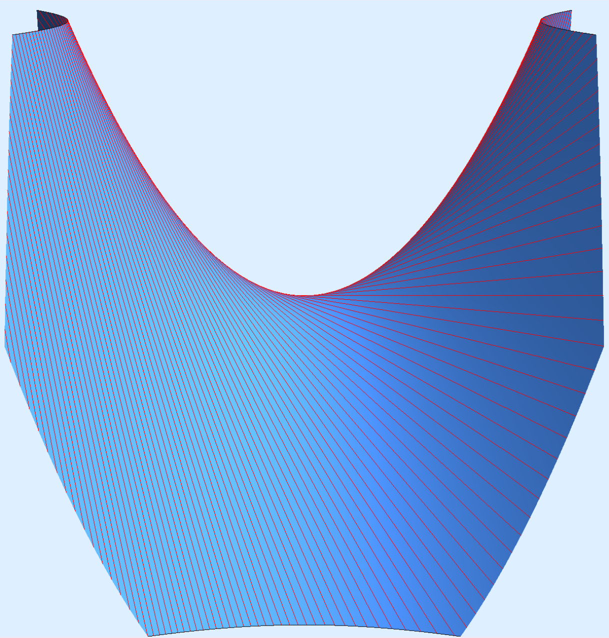
$\boldsymbol{L_+(x_+)}$. **[Lijn].** Doorsnijding van Q met vlak van x_+ constant. Vergelijking in (c_1, c_2)-coördinaten:

$$
\begin{aligned}
x_- \mapsto \phi(x_+, x_-) &= \left(x_+, -\tfrac{1}{2}(x_+ + x_-), x_+ x_-\right), \\
2x_+ c_1 + c_2 &= -x_+^2 - x_+ x_- + x_+ x_- = -x_+^2, \\
c_2 &= -2x_+ c_1 - x_+^2
\end{aligned}
$$

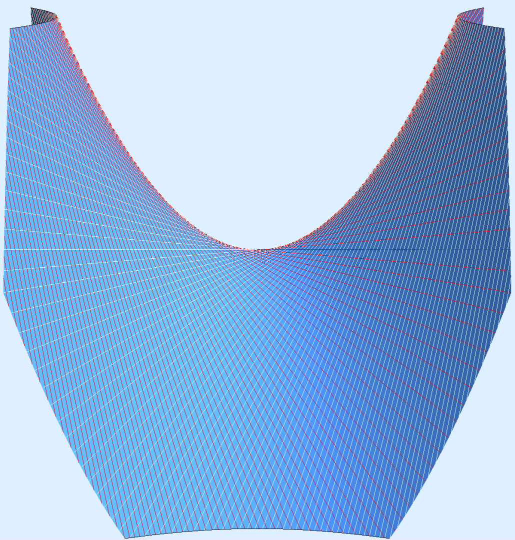
Alle KV's met voorgeschreven grootste nulpunt x_+.
$x_+ - x_- = 2d$ geeft $x_- = x_+ - 2d$, dus parametrisatie

$$
\begin{aligned}
d \mapsto \phi(x_+, x_+ - 2d) &= (x_+, -x_+ + d, x_+^2 - 2x_+ d) \\
&= \sigma(x_+) + d(0, 1, -2x_+) \in \sigma(x_+) + \mathbf{R}(0, -1, 2x_+).
\end{aligned}
$$

Door elk punt $\sigma(x_+)$ van de parabool σ van KV's met samenvallend nulpunten gaat een lijn met richtingsvector $(0, -1, 2x_+)$ en die geheel in Q ligt.

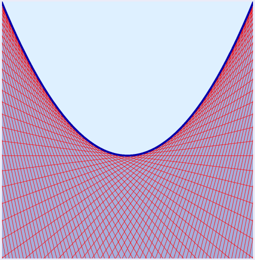


$L_+(x_-)$. [Lijn]. Doorsnijding van Q met vlak van x_- constant. Net zoals $L_+(x_+)$.
Dus Q dubbel regeloppervlak, dwz. twee families van rechte lijnen.



Projectie van lijnen

Loodrechte projectie $(x_+, c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2)$ van lijnen zadelvlak.



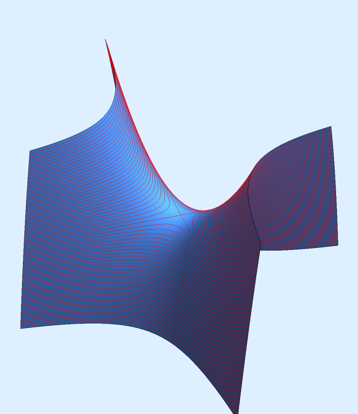
Door elke $(c_1,\ c_2)$ precies 2 lijnen rakend aan (blauwe) parabool $c_2 = c_1^2$.
Hellingen van raaklijnen: $-2x_\pm$ met $x_\pm^2 + 2c_1\, x_\pm + c_2 = 0$.
Nomogram voor nulpunten van KV's,
dwz. een grafisch hulpmiddel in combinatie met lineaal en gradenboog.

Hyperbolen

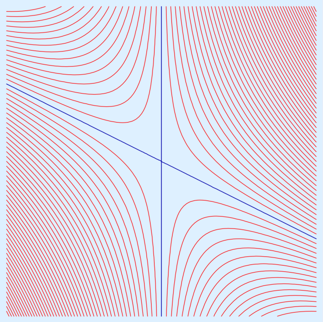
***H*(c_2). [Hyperbool]**. Doorsnijding van Q met vlak van c_2 constant. Vergelijking in (x_+, c_1)-coördinaten:

$$x_+ \mapsto \phi\left(x_+, \frac{c_2}{x_+}\right) = \left(x_+, -\frac{1}{2}\left(x_+ + \frac{c_2}{x_+}\right), c_2\right),$$
$$x_+^2 + 2c_1\, x_+ = -c_2.$$

Alle KV's met voorgeschreven product van nulpunten.



Bij variatie van c_2 definieert $x_+^2 + 2c_1\, x_+ = -c_2$ een familie van niet-ontaarde kegelsneden (= ellips, parabool, hyperbool) in $(x_+,\, c_1)$-coördinaten.
$c_2 = 0$ geeft $x_+(x_+ + 2c_1) = 0$:
vergelijking van twee lijnen, die alleen in 0 elkaar snijden.
Alleen mogelijk als kegelsneden hyperbolen zijn.
Dan zijn die lijnen asymptoten van hyperbolen.



Voorgaande feiten impliceren:

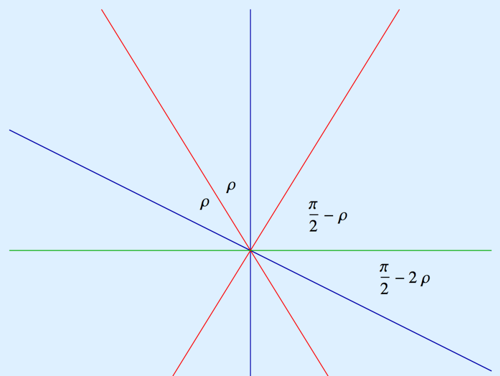
Q hyperbolische paraboloïde.

Hoek ρ

De asymptoten zijn dus $x_+ = 0$ (de c_1-as) en $c_1 = -\frac{1}{2}x_+$ (schuine blauwe lijn).
Zij **2**ρ hoek tussen asymptoten.

$$-\tfrac{1}{2} = \tan(\tfrac{\pi}{2} + 2\rho) = -\tan(\tfrac{\pi}{2} - 2\rho) = -\frac{1}{\tan 2\rho} \qquad \Longrightarrow$$

$$\rho \qquad \text{bepaald door} \qquad \tan 2\rho = 2. \qquad \rho = 31,717\cdots{}^\circ.$$



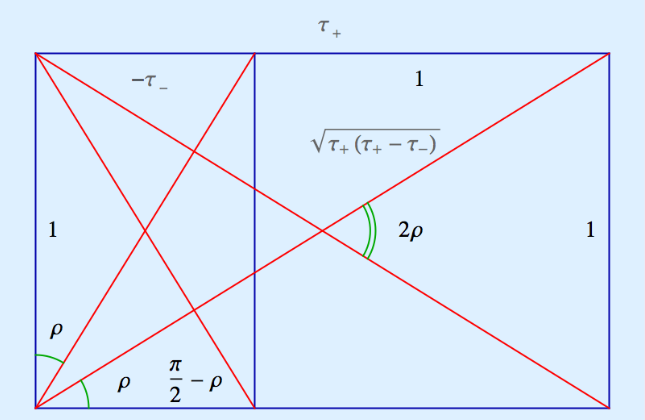
Hoek ρ

Zij $\tau = \tan\rho$. Verdubbelingsformule:

$$2 = \tan 2\rho = \frac{2\tan\rho}{1-\tan^2\rho} = \frac{2\tau}{1-\tau^2} \quad\Longrightarrow\quad (-\tau)^2 - (-\tau) - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow\quad \tau = -\tau_\pm = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \quad\Longrightarrow\quad \tan\rho = -\tau_- = \frac{1}{\tau_+}.$$

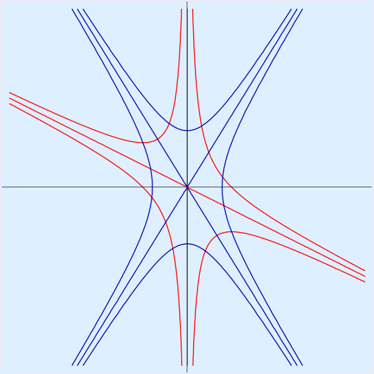
Dus 2ρ hoek tussen diagonalen **gulden rechthoek**.



Gulden zadelvlak

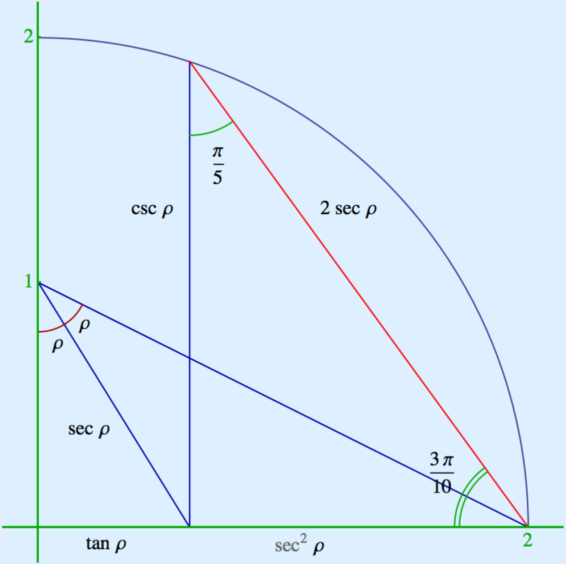
Hyperbolische paraboloïde Q niet in standaardpositie in ruimte.
Draai over hoek ρ om c_2-as
(loodrecht op lichtblauw vlak van rood naar blauw).
Vergelijking in (z_1, z_2, z_3)-coördinaten, niveau's 1, 0, -1

$$\tau_+ \, z_1^2 + \tau_- \, z_2^2 + z_3 = 0 \qquad (\tau_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \gtrless 0).$$



Vijfhoek

Richmond's constructie van regelmatige vijfhoek.



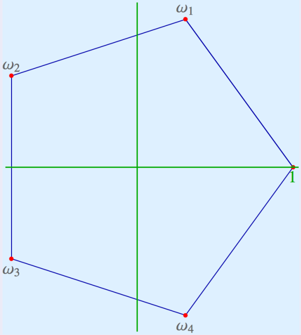
Vijhoek

Algebraisch is de relatie tussen vijfhoek en gulden snede

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = (z-1)\prod_{\pm}(z^2+\tau_{\pm}\, z+1).$$

Nulpunten

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\tau_- \pm i\sqrt{\tau_+^2+1}\right), \qquad \begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\tau_+ \pm i\sqrt{\tau_-^2+1}\right).$$



Formules

$$x^2 + 2c_1 x + c_2 = 0,$$

$$c_1 = -\tfrac{1}{2}(x_+ + x_-), \qquad c_2 = x_+ x_-, \qquad d = \tfrac{1}{2}(x_+ - x_-) \geq 0,$$

$$d^2 = c_1^2 - c_2, \qquad 4d^2 = \text{discriminant},$$

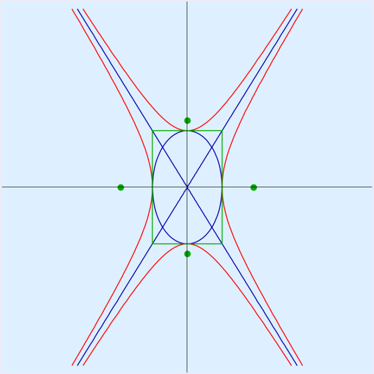
$$x_\pm = -c_1 \pm d = x_\mp \pm 2d,$$

$$\phi(x_+, x_-) = \left(x_+, -\frac{1}{2}(x_+ + x_-), x_+ x_-\right) = (x_+, c_1, c_2),$$

$$\tan 2\rho = \frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho} = \frac{2\sin\rho\cos\rho}{\cos^2\rho - \sin^2\rho} = \frac{2\frac{\sin\rho}{\cos\rho}}{1 - (\frac{\sin\rho}{\cos\rho})^2} = \frac{2\tan\rho}{1 - \tan^2\rho},$$

$$\sec\rho = \frac{1}{\cos\rho}, \qquad \csc\rho = \frac{1}{\sin\rho}.$$

Eind



Twee gulden hyperbolen met brandpunten en een gulden ellips.