EERSTE DEELTENTAMEN WISB 212

Analyse in Meer Variabelen

14-04-2004 14–17 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi, aantekeningen en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1 (Autotoeteroppervlak). Definieer

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \qquad \text{door} \qquad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - (1 - x_3)x_3^2 \qquad \text{en} \qquad V = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid g(x) = 0 \,\}.$$

(i) Ga na dat $V \subset \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \leq 1 \,\}$.

Dit resultaat suggereert om voor een punt $x \in V$ te schrijven dat $x_3 = 1 - s^2$ met $s \in \mathbf{R}$.

(ii) Concludeer

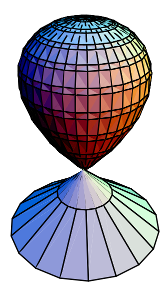
$$V \subset \operatorname{im}(\phi) \qquad \text{met} \qquad \phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{gegeven door} \qquad \phi(s, t) = (1-s^2)(s \cos t, s \sin t, 1).$$

Bewijs dat in feite $V = \operatorname{im}(\phi)$.

(iii) Toon aan dat ϕ een immersie is in alle punten van $\mathbf{R}^3$ met uitzondering van de punten $(\pm 1, t)$ en $(0, t)$, voor $t \in \mathbf{R}$ willekeurig. Preciezer, bewijs

$$\dim \ker \big(D\phi(\pm 1, t)\big) = \dim \ker \big(D\phi(0, t)\big) = 1.$$

Bewijs $\phi(\pm 1, t) = 0$ en $\phi(0, t) = (0, 0, 1) = n$, voor alle $t \in \mathbf{R}$.



In de bijgaande illustratie is niets bijzonders te zien in $n \in \mathbf{R}^3$ (wel daarentegen in $0 \in \mathbf{R}^3$).

(iv) Bewijs m.b.v. de Submersiestelling dat V een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is in alle punten behorende tot $V \setminus \{0\}$.

Achtergrond. Het feit dat ϕ niet-immersief is in de punten $(0, t)$ is dus een "hebbelijkheid" van ϕ en impliceert in dit geval geen singulier gedrag nabij n van $\operatorname{im}(\phi)$ zelf. Tot slot delen we zonder bewijs mee dat V geen deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 in 0 is.

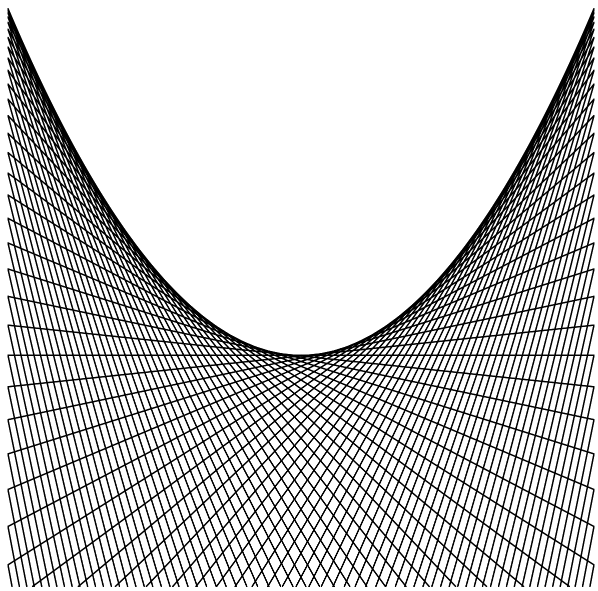
Exercise 0.2 (Vièetetransformatie). Veronderstel dat $y \in \mathbf{R}^2$ voldoet aan $y_1^2 - y_2 \geq 0$ en laten x_1 en $x_2 \in \mathbf{R}$ de wortels zijn van het monisch kwadratisch polynoom $p(X, y) := X^2 + 2y_1 X + y_2$ in de variabele X met coëfficiënten $2y_1$ en y_2.

(i) Bewijs de volgende *formules van Viète*: $y_1 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ en $y_2 = x_1 x_2$.

Beschouw nu de volgende *Vièetetransformatie* (van het vlak van wortels naar het vlak van coëfficiënten):

$$\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad \text{met} \qquad \Phi(x) = y = \Big(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2), x_1 x_2\Big).$$

In de onderstaande illustratie zien we het beeld onder Φ van een raster van equidistante rechte lijnen parallel aan de coördinaatassen (met andere woorden: ruitjespapier). Het lijkt dat deze lijnen onder Φ overgaan in lijnen die allemaal raken aan een parabool. We zullen dit opmerkelijke resultaat bewijzen in het onderstaande.



(ii) Bewijs dat $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x_2, x_1)$ en leidt hieruit af dat het voldoende is voor het bewijs om alleen horizontale lijnen te beschouwen.

(iii) Beschouw $\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in \mathbf{R} \}$, de horizontale lijn op hoogte $x_2 \in \mathbf{R}$. Toon aan dat het beeld van deze lijn onder Φ wordt gegeven door

$$L(x_2) = \{ y \in \mathbf{R}^2 \mid p(x_2, y) = 0 \}.$$

Ga na dat $L(x_2)$ een rechte lijn in $\mathbf{R}^2$ is met richtingscoëfficiënt gelijk aan $-2x_2$.

(iv) Bepaal de verzameling $S \subset \mathbf{R}^2$ van singuliere punten van Φ (d.w.z., $x \in S$ dan en slechts dan als $\det D\Phi(x) = 0$) en verifieer dat $P = \Phi(S)$ een parabool in $\mathbf{R}^2$ is.

Definieer $V = \{ y \in \mathbf{R}^2 \mid y_1^2 > y_2 \}$.

(v) Bewijs dat V de verzameling van punten in $\mathbf{R}^2$ is die onder P liggen. Toon aan dat $\Phi : \mathbf{R}^2 \setminus S \to V$ surjectief is; in het bijzonder, laat zien dat

$$\Phi : \{ x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > x_2 \} \to V$$

een C^∞ diffeomorfisme is. Concludeer dat $y \in V$ impliceert dat $y \in L(x_1) \cap L(x_2)$ met $x_1 \neq x_2$.

(vi) Zij $x_2 \in \mathbf{R}$ vast maar willekeurig gekozen. Bewijs dat $L(x_2) \cap P = \Phi(x_2, x_2)$, bereken de geometrische raaklijn aan P in dit punt, en laat zien dat deze raaklijn gelijk is aan $L(x_2)$.

(vii) Concludeer uit het voorgaande dat door ieder punt $y \in V$ er precies twee verschillende raaklijnen aan P gaan en dat de richtingscoëfficiënten van die raaklijnen gelijk zijn aan tweemaal de tegengestelden van de wortels van het polynoom $p(X, y)$ in X.

Solution of Exercise 0.1

(i) $x \in V$ implies $0 \le x_1^2 + x_2^2 = (1 - x_3)x_3^2$, therefore $0 \le 1 - x_3$, that is, $x_3 \le 1$.

(ii) If $x_3 = 1 - s^2$, then $1 - x_3 = s^2$. Accordingly, for $x \in V$,

$$x_1^2 + x_2^2 = (1 - x_3)x_3^2 = \big(s(1 - s^2)\big)^2, \qquad \text{so} \qquad (x_1, x_2) = s(1 - s^2)(\cos t, \sin t),$$

for suitable $t \in \mathbf{R}$, on account of the parametrization of a circle by trigonometric functions. Thus we obtain $V \subset \operatorname{im}(\phi)$. Conversely, for every $x \in \operatorname{im}(\phi)$,

$$x_1^2 + x_2^2 = \big(s(1 - s^2)\big)^2 \qquad \text{and} \qquad (1 - x_3)x_3^2 = s^2(1 - s^2)^2, \qquad \text{that is} \qquad g(x) = 0.$$

(iii) Suppose, for $h \in \mathbf{R}^2$,

$$D\phi(s, t)h = \begin{pmatrix} (1 - 3s^2)\cos t & -s(1 - s^2)\sin t \\ (1 - 3s^2)\sin t & s(1 - s^2)\cos t \\ -2s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ -2sh_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

If $s \neq 0$, it follows that $h_1 = 0$. The two top equations above then give

$$h_2 s(1 - s^2)\sin t = h_2 s(1 - s^2)\cos t = 0, \qquad \text{so} \qquad s(1 - s^2)h_2 = 0.$$

Accordingly, if $s \notin \{-1, 0, 1\}$, then $h_2 = 0$ too; and therefore ϕ is immersive in this case. On the other hand,

$$D\phi(\pm 1, t) = -2 \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ \sin t & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D\phi(0, t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ \sin t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which shows that all three of these mappings in $\operatorname{Lin}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ have a one-dimensional kernel. It is direct from the definition that $\phi(\pm 1, t) = 0$ and $\phi(0, t) = n$, for all $t \in \mathbf{R}$.

(iv) We have, for $x \in V$,

$$Dg(x) = (2x_1, 2x_2, -2x_3 + 3x_3^2) \in \operatorname{Lin}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}).$$

This mapping fails to be surjective only if all its entries equal 0, which is the case only if $x = 0$ (the solution with $x_3 = \frac{2}{3}$ does not belong to V). Hence, g is submersive at all points of $V \setminus \{0\}$; and on the strength of the Submersion Theorem we now obtain that V is a C^∞ manifold in $\mathbf{R}^3$ of dimension 2 at all of its points, with the possible exception of the point 0.

Solution of Exercise 0.2

(i) $x^2 + 2y_1 x + y_2 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$ implies $y_1 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ and $y_2 = x_1 x_2$.

(ii) The coefficients of $\Phi(x)$ are symmetric in x_1 and x_2. Horizontal lines are of the form $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = \text{constant}\}$.

(iii) Suppose $y = \Phi(x)$, that is, $2y_1 = -x_1 - x_2$ and $y_2 = x_1 x_2$. Then

$$2x_2 y_1 = -x_1 x_2 - x_2^2 = -y_2 - x_2^2, \qquad \text{so} \qquad p(x_2, y) = 0, \qquad \text{that is} \qquad y_2 = -2x_2 y_1 - x_2^2;$$

and this shows that y belongs to the straight line $L(x_2)$ in $\mathbf{R}^2$ of slope $-2x_2$.

(iv) We have

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \qquad \det D\Phi(x) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Hence $S = \{(x_2, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$, the diagonal in $\mathbf{R}^2$. Now $(y_1, y_2) = \Phi(x_2, x_2) = (-x_2, x_2^2)$ satisfies $y_1^2 = x_2^2 = y_2$, which implies

$$P = \Phi(S) \subset \{ y \in \mathbf{R}^2 \mid y_1^2 - y_2 = 0 \} =: \widetilde{P}.$$

Conversely, if $y_1^2 = y_2$, then we have $y_2 \geq 0$; hence there exists $x_2 \in \mathbf{R}$ satisfying $y_2 = x_2^2$. Then $y_1^2 = x_2^2$, having a solution $y_1 = -x_2$, that is, $y = \Phi(x_2, x_2)$. It follows that $\widetilde{P} \subset P$ and therefore $P = \widetilde{P}$.

(v) Indeed, given $y \in V$, the system of equations $x_1 + x_2 = -2y_1$ and $x_1 x_2 = y_2$ for $x \in \mathbf{R}^2$ is equivalent to the system $x_1^2 + 2y_1 x_1 + y_2 = 0$ and $x_2 = -x_1 - 2y_1$. The latter system has a solution $x \in \mathbf{R}^2 \setminus S$, because $y \in V$ represents the well-known discriminant criterion for $p(X, y)$ having two distinct real roots. Hence $y = \Phi(x)$, and therefore $y \in L(x_1) \cap L(x_2)$ with $x_1 \neq x_2$.

(vi) Consider $y \in L(x_2) \cap P$. According to part (iv) the condition $y \in P$ implies the existence of $\widetilde{x}_2 \in \mathbf{R}$ such that $y = \Phi(\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2)$. Furthermore, the condition $y \in L(x_2)$ now gives

$$0 = x_2^2 - 2x_2\widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_2^2 = (x_2 - \widetilde{x}_2)^2, \qquad \text{so} \qquad x_2 = \widetilde{x}_2, \qquad \text{hence} \qquad y = \Phi(x_2, x_2).$$

The tangent line of P at $\Phi(x_2, x_2)$ is the set of $y \in \mathbf{R}^2$ satisfying

$$(2y_1, -1)\Big|_{y = (-x_2, x_2^2)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -(2x_2 y_1 + y_2) = 0.$$

As a consequence, the geometric tangent line of P at $\Phi(x_2, x_2)$ equals $\{ y \in \mathbf{R}^2 \mid 2x_2 y_1 + y_2 = c \}$ where $c \in \mathbf{R}$ is determined by $c = -2x_2^2 + x_2^2 = -x_2^2$; in other words, the geometric tangent line equals $L(x_2)$.

(vii) Obvious.