TWEEDE DEELTENTAMEN ANALYSE C

7 januari 1991 14.00–17.00 uur

- *Zet op elk blad dat u inlevert uw naam, en op de eerste bladzijde de naam van uw practicumleider.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen.*
- *De gewichten van de vraagstukken zijn*: **50:20:30**

Exercise 0.1. [**Lichaam van Viviani**]. Dit is de verzameling $L \subset \mathbf{R}^3$ die ontstaat als doorsnijding van de eenheidsbol in $\mathbf{R}^3$ en van een volle cylinder, preciezer:

$$L = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| \leq 1,\, x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 \,\}.$$

Dan geldt:

$$\partial L = V_1 \cup V_2, \quad V_1 = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| = 1,\, x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 \,\}, \quad V_2 = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| \leq 1,\, x_1^2 + x_2^2 = x_1 \,\}.$$

(i) Bewijs dat $V_1 \cap V_2 = \mathrm{im}(\phi)$, waarbij $\phi : \,]-\pi,\, \pi\,[\, \to \mathbf{R}^3$ wordt gedefinieerd door:

$$\phi(\alpha) = (\cos^2 \alpha,\, \cos\alpha \sin\alpha,\, \sin\alpha) \qquad (-\pi < \alpha < \pi).$$

Zonder bewijs mag u aannemen dat de beperking van ϕ tot $]-\pi,\, 0\,[$ en $]\,0,\, \pi\,[$ respectievelijk, een C^∞-inbedding is.

(ii) Toon aan dat de lengte van $V_1 \cap V_2$ gelijk is aan de volgende integraal (deze is **niet** te berekenen m.b.v. primitiveren):

$$4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 \alpha}\, d\alpha.$$

(iii) Laat zien dat de loodrechte projectie van V_1 op het vlak $\{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0 \,\}$ gelijk is aan de verzameling $D \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ met:

$$D = \{\, y \in \mathbf{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq y_1 \,\} = \{\, r(\cos\alpha,\, \sin\alpha) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq \cos\alpha \,\}.$$

Ga na:

$$L = \{\, (y,\, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid y \in D,\, |x_3| \leq \sqrt{1 - \|y\|^2} \,\}.$$

(iv) Bereken, eventueel m.b.v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha\, d\alpha = \frac{2}{3}$, dat :

$$\mathrm{vol}_3(L) = \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9}.$$

(v) Bewijs dat de oppervlakte van V_1 gelijk is aan $2\pi - 4$ (zie Voorbeeld 7.4.10).

(vi) Toon aan dat de oppervlakte van V_2 gelijk is aan 4. Merk op dat de oppervlakte van de rand van het lichaam van Viviani gelijk is aan die van de halve eenheidssfeer.

Exercise 0.2. Zij $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ een C^2-functie en veronderstel:

$$\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) < 0 \,\} \neq \emptyset; \qquad \partial\Omega = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) = 0 \,\}; \qquad \overline{\Omega} \text{ is begrensd;}$$
$$\|\operatorname{grad} g(y)\| = 1, \text{ voor } y \in \partial\Omega; \qquad \Omega \text{ ligt aan één kant van } \partial\Omega.$$

(i) Ga na dat $\nu(y) = \operatorname{grad} g(y)$, voor $y \in \partial\Omega$. Toon aan:

$$\operatorname{hyperarea}_{n-1}(\partial\Omega) = \int_\Omega \Delta g(x)\, dx,$$

hierbij is Δ de Laplace-operator.

(ii) Bewijs m.b.v. onderdeel (i) dat geldt: $\operatorname{hyperarea}_{n-1}(S^{n-1}) = n \operatorname{vol}_n(B^n)$.

Exercise 0.3. Zij $U \subset \mathbf{R}^2$ de driehoek met:

$$U = \{\, x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_1 + x_2 < 1 \,\}.$$

Zij $V = \,]\,0, 1\,[\, \times \,]\,0, 1\,[\, \subset \mathbf{R}^2$, en definieer $\Psi : V \to \mathbf{R}^2$ door: $\Psi(y) = (y_1(1 - y_2),\ y_1 y_2)$.

(i) Bewijs dat $\Psi : V \to U$ een C^∞-diffeomorfisme is, en dat $\det D\Psi(y) = y_1$, voor $y \in V$.

(ii) Zij $f : [\,0,\ 1\,] \to \mathbf{R}$ een continue functie. Bewijs m.b.v. onderdeel (i) de volgende formule:

$$\int_U x_1^{p_1} x_2^{p_2} f(x_1 + x_2)\, dx = \frac{\Gamma(p_1 + 1)\Gamma(p_2 + 1)}{\Gamma(p_1 + p_2 + 2)} \int_0^1 x^{p_1 + p_2 + 1} f(x)\, dx \quad (p_1 + 1 > 0,\ p_2 + 1 > 0).$$

Hierbij herinneren we aan de bekende formules:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{p-1}\, dt = \Gamma(p), \qquad \int_0^1 t^{p-1}\, (1 - t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \qquad (p > 0,\ q > 0).$$

De driehoek Σ^2 in $\mathbf{R}^3$ wordt gedefinieerd door:

$$\Sigma^2 = \{\, y \in \mathbf{R}^3 \mid y_1 + y_2 + y_3 = 1,\ y_i \geq 0, \text{ voor } 1 \leq i \leq 3 \,\}.$$

(iii) Schrijf Σ^2 als grafiek van een functie van de variabele $(y_1,\ y_2)$ die een geschikte verzameling in $\mathbf{R}^2$ doorloopt, en bewijs:

$$\int_{\Sigma^2} y_1^{p_1 - 1}\, y_2^{p_2 - 1} y_3^{p_3 - 1} \omega(y)\, dy = \sqrt{3}\, \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\Gamma(p_3)}{\Gamma(p_1 + p_2 + p_3)} \qquad (p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ p_3 > 0).$$

Ga i.h.b. na dat geldt: $\operatorname{area}(\Sigma^2) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$. Verifieer dit ook door directe berekening.

Uitwerking van Tweede Deeltentamen Analyse C van 7 januari 1991.

Uitwerking 1.

(i) We hebben:

$$V_1 \cap V_2 = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = x_1 \}.$$

Als $x \in \mathrm{im}(\phi)$, dan bestaat $\alpha \in \,]-\pi,\ \pi\,[$ met $x = (\cos^2\alpha,\ \cos\alpha\sin\alpha,\ \sin\alpha)$. Dus geldt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = \cos^2\alpha = x_1;$$

m.a.w. $x \in V_1 \cap V_2$. Stel nu anderzijds $x \in V_1 \cap V_2$, dan geldt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{en} \quad x_1^2 + x_2^2 = x_1; \quad \text{en dus:} \quad x_1 + x_3^2 = 1.$$

Dus bestaat een element $\alpha \in \,]-\pi,\ \pi\,[$ zó, dat:

$$x_1 = \cos^2\alpha, \quad x_3 = \sin\alpha.$$

Merk op dat α niet uniek is: als $x_3 \geq 0$, resp. $x_3 < 0$, dan voldoet ook $\pi - \alpha$, resp. $-\pi - \alpha$. Verder vinden we: $\cos^4\alpha + x_2^2 + \sin^2\alpha = 1$, d.w.z.:

$$x_2^2 = 1 - \sin^2\alpha - \cos^4\alpha = \cos^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Dus $x_2 = \pm\cos\alpha\sin\alpha$; en het teken van x_2 legt nu $\alpha \in \,]-\pi,\ \pi\,[$ bovendien ondubbelzinnig vast. Onderdeel (i) is nu bewezen.

(ii) Er geldt:

$$\phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\phi}{d\alpha}(\alpha) = \begin{pmatrix} -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$\|\frac{d\phi}{d\alpha}(\alpha)\| = (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sin^2\alpha}.$$

Volgens formule (7.16) wordt de lengte van $V_1 \cap V_2$ gegeven door:

$$\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha}\, d\alpha = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha}\, d\alpha.$$

(iii) Uit de definitie van V_1 volgt onmiddellijk dat de loodrechte projectie van V_1 op het vlak $\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0 \}$ gelijk is aan de verzameling $D \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ met $D = \{ y \in \mathbf{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 \leq y_1 \}$. Zij nu $y \in D$, dan geldt:

$$(y_1 - \frac{1}{2})^2 + y_2^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Dus bestaan unieke elementen $\beta \in \,]-\pi,\ \pi\,]$ en $s \in [\,0,\ 1\,]$ zó, dat:

$$(y_1 - \frac{1}{2},\ y_2) = \frac{1}{2}s(\cos\beta,\ \sin\beta).$$

Dit geeft:

$$y = s(\frac{1}{2}(1 + \cos\beta),\ \frac{1}{2}\sin\beta) = s\cos\frac{1}{2}\beta(\cos\frac{1}{2}\beta,\ \sin\frac{1}{2}\beta) = r(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$

indien we schrijven $\alpha = \frac{1}{2}\beta \in \left]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$ en $r = s\cos\frac{1}{2}\beta \in [\,0,\, \cos\alpha\,]$. Dit geeft:

$$D \subset \{\, r(\cos\alpha,\, \sin\alpha) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq \cos\alpha\,\}.$$

De omgekeerde inclusie volgt nu door de voorgaande argumenten in omgekeerde volgorde te lezen. Merk op dat in feite de afbeelding:

$$\{\,(r,\alpha) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},\, 0 < r < \cos\alpha\,\} \to \mathrm{int}(D) \quad \text{met} \quad (r,\alpha) \mapsto r(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

een C^1-diffeomorfisme is. Vervolgens hebben we voor $x \in \mathbf{R}^3$, met $y = (x_1, x_2)$, dat $\|x\|^2 = \|y\|^2 + x_3^2$; en bijgevolg:

$$x \in L \Longleftrightarrow y \in D \quad \text{en} \quad \|y\|^2 + x_3^2 \leq 1.$$

Dus:

$$x \in L \Longleftrightarrow y \in D \quad \text{en} \quad |x_3| \leq \sqrt{1 - \|y\|^2}.$$

(iv) Uit onderdeel (iii) volgt:

$$\mathrm{vol}_3(L) = \int_D \left(\int_{-\sqrt{1-\|y\|^2}}^{\sqrt{1-\|y\|^2}} dx_3 \right) dy.$$

Vanwege de beschrijving van $D \subset \mathbf{R}^2$ uit onderdeel (iii) is het geschikt om poolcoördinaten in $\mathbf{R}^2$ te introduceren, dan volgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(L) &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\alpha} \left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}} dx_3 \right) r\,dr \right) d\alpha = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\alpha} \sqrt{1-r^2}\, r\,dr \right) d\alpha = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-(\sqrt{1-r^2})^3 \right]_0^{\cos\alpha} d\alpha = \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - (\sqrt{1-\cos^2\alpha})^3 \right) d\alpha = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\alpha)\,d\alpha = \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

(v) Net als in Voorbeeld 7.4.10 hebben we dat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{area}(V_1) &= 2\int_{\mathrm{projectie}(V_1)} \frac{dy}{\sqrt{1-\|y\|^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\alpha} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} \right) d\alpha = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^{\cos\alpha} d\alpha = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{1-\cos^2\alpha} \right) d\alpha = \\
&= 4\,\frac{\pi}{2} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,d\alpha = 2\pi - 4[-\cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 4.
\end{aligned}$$

(vi) M.b.v. de onderdelen (i) en (iii) zien we dat een parametrisatie ϕ van V_2 wordt gegeven door:

$$\phi(\alpha,\, x_3) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{met} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad -|\sin\alpha| \leq x_3 \leq |\sin\alpha|.$$

Dus:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(\alpha,\, x_3) = \begin{pmatrix} -\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\alpha,\, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\times\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\alpha,\, x_3) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bijgevolg $\omega_\phi(\alpha,\, x_3) = 1$; en derhalve:

$$\begin{aligned} \operatorname{area}(V_2) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-|\sin\alpha|}^{|\sin\alpha|} dx_3 \right) d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin\alpha|\, d\alpha = \\ &= 2[\cos\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + 2[-\cos\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-(-1)) = 4. \end{aligned}$$

Uitwerking 2.

(i) Omdat $\partial\Omega$ een niveauhyperoppervlak voor g is, geldt $\operatorname{grad} g(y) \perp T_y(\partial\Omega)$, als $y \in \partial\Omega$. Gegeven is dat $\operatorname{grad} g(y)$, voor $y \in \partial\Omega$, een eenheidsvector is, en omdat g stijgt in de richting van $\operatorname{grad} g(y)$, is $\operatorname{grad} g(y)$ de uitwendige normaal $\nu(y)$ op $\partial\Omega$ in $y \in \partial\Omega$. Volgens formule (7.63) geldt voor het vectorveld $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ met:

$$f(x) = \operatorname{grad} g(x), \;\text{ dat }\; \operatorname{div} f(x) = \Delta g(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Toepassing van de Divergentiestelling van Gauss op f geeft:

$$\begin{aligned} \operatorname{hyperarea}_{n-1}(\partial\Omega) &= \int_{\partial\Omega} \omega(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} < \operatorname{grad} g(y),\, \operatorname{grad} g(y) > \omega(y)\, dy = \\ &= \int_{\partial\Omega} < f(y),\, \nu(y) > \omega(y)\, dy = \int_{\Omega} \Delta g(x)\, dx. \end{aligned}$$

(ii) Zij $g(x) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1)$, voor $x \in \mathbf{R}^n$; dan geldt:

$$\operatorname{grad} g(x) = x, \;\; \Delta g(x) = n \;\; (x \in \mathbf{R}^n).$$

Voor $y \in S^{n-1}$, geldt $\|\operatorname{grad} g(y)\| = 1$; en de identiteit volgt dus uit onderdeel (i).

Uitwerking 3.

(i) We verifiëren dat $\Psi : V \to U$ een C^∞-diffeomorfisme is. Stel $\Psi(y) = x$, voor $y \in V$. Dan hebben we:

$$x_1 = y_1(1-y_2) > 0, \quad x_2 = y_1 y_2 > 0, \quad x_1 + x_2 = y_1 < 1;$$

en derhalve is $\Psi : V \to U$ een C^∞-afbeelding. Voor elke $x \in U$ geldt:

$$0 < x_1 + x_2 < 1, \quad 0 < \frac{x_2}{x_1 + x_2} < 1.$$

Dus is $\Phi : U \to V$ een welgedefinieerde C^∞-afbeelding indien:

$$\Phi(x) = (x_1 + x_2,\, \frac{x_2}{x_1 + x_2}).$$

Nu geldt:

$$\Phi(\Psi(y)) = \Phi(y_1 - y_1y_2,\, y_1y_2) = (y_1,\, \frac{y_1y_2}{y_1}) = y,$$

$$\Psi(\Phi(x)) = \Psi(x_1 + x_2,\, \frac{x_2}{x_1 + x_2}) = (x_1 + x_2 - x_2,\, x_2) = x.$$

En dit bewijst de bewering.

Het volgende argument is maakt duidelijker wat er in feite aan de hand is. Als $x \in U$, dan geldt:

$$x = r^2(\cos^2 \alpha,\, \sin^2 \alpha), \quad \text{voor} \quad (r,\, \alpha) \in W := \,]\,0,\, 1\,[\, \times \,\Big]\, 0,\, \frac{\pi}{2}\, \Big[\,,$$

terwijl $x \mapsto (r,\, \alpha)$ een C^∞-diffeomorfisme $U \to W$ is. Stel nu $y = (r^2,\, \sin^2 \alpha)$, dan is $(r,\, \alpha) \mapsto y$ een C^∞-diffeomorfisme $W \to V$, met:

$$x = (r^2(1 - \sin^2 \alpha),\, r^2 \sin^2 \alpha) = (y_1(1 - y_2),\, y_1y_2).$$

Dus is $\Psi^{-1} : U \to V$ een C^∞-diffeomorfisme.

Er geldt:

$$D\Psi(y) = \begin{pmatrix} 1 - y_2 & -y_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}, \quad \det D\Psi(y) = y_1 - y_1y_2 + y_1y_2 = y_1.$$

(ii) Volgens de Substitutiestelling geldt nu:

$$\begin{aligned}\int_U \cdots dx &= \int_V (y_1(1 - y_2))^{p_1} (y_1y_2)^{p_2} f(y_1)\, y_1\, dy = \\ &= \int_{]\,0,\,1\,[\times]\,0,\,1\,[} y_1^{p_1+p_2+1} f(y_1)\, y_2^{p_2} (1 - y_2)^{p_1}\, dy_1 dy_2 = \\ &= \int_0^1 y_1^{p_1+p_2+1} f(y_1)\, dy_1 \int_0^1 y_2^{p_2} (1 - y_2)^{p_1}\, dy_2 = \\ &= \frac{\Gamma(p_2 + 1)\Gamma(p_1 + 1)}{\Gamma(p_2 + p_1 + 2)} \int_0^1 x^{p_1+p_2+1} f(x)\, dx,\end{aligned}$$

m.b.v. de gegeven formule.

(iii) Er geldt:

$$\Sigma^2 = \{\, y \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le y_1 \le 1,\, 0 \le y_2 \le 1 - y_1,\, y_3 = 1 - y_1 - y_2 \,\};$$

dus:

$$\Sigma^2 = \mathrm{graph}(h), \quad \text{met } h : \overline{U} \to \mathbf{R} \text{ gegeven door } h(y_1, y_2) = 1 - (y_1 + y_2).$$

We hebben:

$$\mathrm{grad}\, h(y_1, y_2) = (-1, -1), \qquad \|\,\mathrm{grad}\, h(y)\|^2 = 2.$$

Derhalve geeft formule op p.508, voor alle $y \in U$:

$$\omega_\phi(y) = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}.$$

Daarom:

$$\int_{\Sigma^2} y_1^{p_1-1}\cdots y_3^{p_3-1}\omega(y)\,dy = \int_U y_1^{p_1-1}y_2^{p_2-1}(1-(y_1+y_2))^{p_3-1}\sqrt{3}\,dy =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\int_0^1 x^{p_1+p_2-1}(1-x)^{p_3-1}\,dx =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)}\,\frac{\Gamma(p_1+p_2)\Gamma(p_3)}{\Gamma(p_1+p_2+p_3)} = \sqrt{3}\,\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\Gamma(p_3)}{\Gamma(p_1+p_2+p_3)},$$

m.b.v. onderdeel (ii). I.h.b., met $p_1 = \cdots = p_3 = 1$:

$$\operatorname{area}(\Sigma^2) = \frac{\sqrt{3}}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$