TWEEDE DEELTENTAMEN ANALYSE C

3 januari 1995 9.30–12.30 uur

- *Zet uw naam op elk blad, en op het eerste blad de naam van uw practicumleider alsmede het aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *De gewichten van de vraagstukken zijn*: **45:45:10**.

Exercise 0.1. Definieer de vector $a \in \mathbf{R}^3$, en de vlakken V en V_0 in $\mathbf{R}^3$ door resp.

$$a = (0, -1, 1), \qquad V = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid \langle x, a \rangle = 0 \,\}, \qquad V_0 = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0 \,\}.$$

Definieer verder C als de halve cylindermantel in $\mathbf{R}^3$ gegeven door

$$C = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 > 0 \,\}.$$

Zij tenslotte W de wigvormige open begrensde verzameling in $\mathbf{R}^3$ begrensd door de platte vlakken V en V_0, en door het oppervlak C.

(i) Bewijs
$$W = \{\, r(\sin\alpha, \cos\alpha, x_3) \mid 0 < r < 1,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < x_3 < \cos\alpha \,\}.$$

(ii) Toon aan dat $\mathrm{vol}(W) = \dfrac{2}{3}$, bijvoorbeeld door onderdeel (i) te gebruiken.

We hebben $\partial W = S \cup S_0 \cup S_C$, waarbij $S \subset V$, $S_0 \subset V_0$ en $S_C \subset C$.

(iii) Bewijs $\mathrm{area}(S_C) = 2$.

Zij $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ het vectorveld gegeven door $f(x) = (x_1, x_2, 0)$, en zij $\nu(y)$ de uitwendige normaal op ∂W in $y \in \partial W$.

(iv) Toon aan dat $\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} a$, voor alle $y \in S$. Geef een meetkundig argument waarom de flux van f door S negatief is. Bewijs nu m.b.v. de onderdelen (ii) en (iii)
$$\int_S \langle f, \nu \rangle(y)\, d_2 y = -\frac{2}{3}.$$

Zij $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de functie gegeven door $g(x) = \|(x_1, 1, 0)\|$.

(v) Bewijs voor de integraal van g t.a.v. de booglengte langs de kromme $S \cap S_C$
$$\int_{S \cap S_C} g(x)\, d_1 x = \frac{3}{2}\pi.$$

Exercise 0.2. Het *standaard* $(n-1)$-*simplex* Σ^{n-1} in $\mathbf{R}^n$ wordt gedefinieerd door

$$\Sigma^{n-1} = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1,\, x_i \geq 0, \text{ voor } 1 \leq i \leq n \,\}.$$

Zij $\phi : D \to \Sigma^{n-1}$ met $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$ open, een C^1-parametrisering van een open deel van Σ^{n-1} met verwaarloosbaar complement. We schrijven $\mathbf{R}^n_+ = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0, \text{ voor } 1 \leq i \leq n \,\}$.

(i) Ga na dat de afbeelding $\Psi : \,]\,0, \infty\,[\, \times D \to \mathbf{R}^n_+$ gegeven door $\Psi(t, y) = t\,\phi(y)$ een C^1-diffeomorfisme is op een open dichte deelverzameling in $\mathbf{R}^n_+$. Gebruik hierbij om de injectiviteit van Ψ te verifiëren bijvoorbeeld dat $\langle\, \phi(y), (1, \ldots, 1)\,\rangle = 1$. Toon aan

$$|\det D\Psi(t, y)| = t^{n-1} |\det(D\phi(y) \mid \phi(y))|.$$

(ii) Definieer $e = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Bewijs

$$(\star) \qquad \langle\, \phi(y), e\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \langle\, D_i\phi(y), e\,\rangle = 0 \qquad (y \in D,\, 1 \leq i \leq n-1).$$

Toon aan dat e en de $D_i\phi(y)$, voor $1 \leq i \leq n-1$, tezamen een basis voor $\mathbf{R}^n$ vormen; en bewijs m.b.v. $(\star)$ dat er getallen $c_i \in \mathbf{R}$, voor $1 \leq i \leq n-1$, bestaan met

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, e + \sum_{i=1}^{n-1} c_i D_i \phi(y).$$

(iii) Bewijs nu m.b.v. de onderdelen (i) en (ii) dat $|\det D\Psi(t, y)| = \frac{1}{\sqrt{n}} t^{n-1} \omega_\phi(y)$, waarbij ω de Euclidische $(n-1)$-dimensionale dichtheid op Σ^{n-1} is. Concludeer

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty t^{n-1} \left(\int_{\Sigma^{n-1}} f(ty)\, d_{n-1}y \right) dt \qquad (f \in C_c(\mathbf{R}^n_+)).$$

(iv) Ga na dat de formule uit onderdeel (iii) ook van toepassing is op de functie $f(x) = e^{-(x_1 + \cdots + x_n)}$, voor $x \in \mathbf{R}^n_+$. Bewijs hiermede $\text{hyperarea}_{n-1}(\Sigma^{n-1}) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$.

Exercise 0.3. Onderstel $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2$ is gegeven door $f(x) = \frac{1}{\|x\|^2} Jx$, met J als in Formule (7.24). Zij $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ als in de Integraalstelling van Green, terwijl $0 \in \Omega$. Bewijs

$$\int_{\partial\Omega} \langle\, f(s), d_1 s\,\rangle = 2\pi.$$

Aanwijzing: Er zijn verschillende methoden denkbaar:

(a) Gebruik Voorbeeld 6.9.3;

(b) Bewijs $f = \operatorname{grad} \arg$ waarbij $\arg : \mathbf{R}^2 \setminus (\,]-\infty, 0] \times \{0\}) \to \mathbf{R}$ de argumentfunctie is.