ANALYSE HARMONIQUE. — *Formule de Poisson et distribution asymptotique du spectre simultané d'opérateurs différentiels.* Note (*) de **Johan Kolk**, présentée par M. Jean Dieudonné.

On annonce une formule de Poisson pour une variété compacte de la forme $X = \Gamma\backslash G/K$, où $G = KA_0N_0$. Elle démontre une relation entre le spectre simultané S des opérateurs différentiels G-invariants sur X et des distributions sur A_0 à propriétés déterminées par la géométrie de X. Aussi bien on en obtient des estimations asymptotiques pour S. Les outils principaux sont l'analyse harmonique de Harish-Chandra et la technique d'estimation de Hörmander [(1) et (2)].

We announce a Poisson formula for a compact manifold of the form $X = \Gamma\backslash G/K$, *where* $G = K \exp \mathfrak{a}_0 N_0$ *is an Iwasawa decomposition of a semisimple Lie group G and* Γ *is a discrete co-compact subgroup. Elaboration of the Selberg trace formula by Harish-Chandra's methods leads to the result. It shows a relation between the simultaneous spectrum* $S \subset \mathfrak{a}_{0c}^*$ *of the left G-invariant differential operators on X and certain distributions, the properties of which are determined by the geometry of X, on* $\exp \mathfrak{a}_0$. *We apply the formula in order to obtain asymptotic estimates for S. We prove that the complementary spectrum gives a lower order contribution and we improve upon a result obtained by I.M. Gel'fand, using thereby a generalization of a technique of Hörmander.*

I. Introduction. — Soit X une variété de dimension n, de la forme $\Gamma\backslash G/K$, où G est un groupe de Lie semi-simple connexe réel de centre fini, K un sous-groupe compact maximal, Γ un sous-groupe discret co-compact sans torsion. On fixe une décomposition d'Iwasawa $G = KA_0N_0$. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{n}_0$ les algèbres de Lie respectives de G, K, A_0, N_0; $\mathscr{F}_0 = \mathfrak{a}_{0c}^*$ et $\mathfrak{w}$ le groupe de Weyl de (G, K).

On écrira Y^X pour le centralisateur de X dans Y. En désignant $\mathfrak{G}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, on pose $\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}^K$. $\mathfrak{Q}$ est l'algèbre commutative des opérateurs différentiels G-invariants à gauche sur X. $L^2(X)$ admet une décomposition hilbertienne en sous-espaces H_λ ($\lambda \in S$) de sorte que :

- $S \subset \mathscr{F}_0$ est un ensemble discret et dénombrable;
- H_λ est déterminé uniquement modulo l'action de $\mathfrak{w}$ par le vecteur $\lambda \in S$;
- $m(\lambda) = \dim H_\lambda < \infty$ et $\mathfrak{Q}$ opère en H_λ par multiplication scalaire.

Selberg (3) et Gel'fand (4) ont entamé l'étude du comportement asymptotique du spectre simultané S de $\mathfrak{Q}$. Gangolli (5) a utilisé des résultats de Harish-Chandra pour obtenir des preuves complètes dans certains cas. Dans cette Note on annonce une formule de Poisson qui a été obtenue en collaboration avec V. S. Varadarajan. Elle établit une correspondance entre S et des distributions $\mathfrak{w}$-invariantes sur A_0 ayant leurs supports à des distances de l'identité égales aux longueurs des géodésiques périodiques de X.

Comme applications on peut améliorer les estimations de Gel'fand (4) pour S et de Huber (6) pour le spectre des longueurs.

II. Formule de Selberg. — Soit I(G) l'espace des fonctions K-bi-invariantes, $I_c^\infty(G) = C_c^\infty(G) \cap I(G)$ et $\mathscr{I}(G) = \mathscr{C}(G) \cap I(G)$, où $\mathscr{C}(G)$ est l'espace de Schwartz [*cf.* (7), section 9]. D'après Gangolli (8), resp. Harish-Chandra [(7), section 21], la transformation d'Abel $f \mapsto f_{A_0}$ est un isomorphisme topologique des algèbres de convolution $I_c^\infty(G) \to C_c^\infty(A_0)^{\mathfrak{w}}$, resp. $\mathscr{I}(G) \to \mathscr{C}(A_0)^{\mathfrak{w}}$. Pour tout $f \in I_c^\infty(G)$ l'opérateur de $L^2(X)$

en $L^2(X)$ qui est défini par $g \mapsto g * f$, est à noyau C^∞, donc traçable; par conséquence :

$$(1) \qquad \langle \sum_{\lambda \in S} m(\lambda) e^{\lambda_0 \log}, f_{A_0} \rangle = \sum_{C(\gamma)} \operatorname{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G/G_\gamma} f(x \gamma x^{-1})\, d\bar{x},$$

où $C(\gamma)$ est la Γ-classe de γ, $G_\gamma = G^\gamma$, et $d\bar{x}$ une mesure G-invariante.

III. Formule de Poisson. — On écrira $r = \dim A_0$ et $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{0I} \oplus \mathscr{F}_{0R}$ et on sait (9) qu'il y a une fonction non négative $\beta \in C^\infty(\mathscr{F}_{0I})^{\varpi}$ à croissance polynomiale d'ordre $n-r$ telle que, pour tout $f \in I_c^\infty(G)$, on ait :

$$(2) \qquad f(1) = \int_{\mathscr{F}_{0I}} \hat{f}_{A_0}(\lambda)\, \beta(\lambda)\, d\lambda = \langle \beta, f_{A_0} \rangle.$$

1 est le seul élément central de Γ. $\Gamma \backslash G$ étant compact, chaque $\gamma \in \Gamma$ est un élément semi-simple et donc $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}_\gamma$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$. A une conjugaison près on peut fixer $\mathfrak{l}$ en la choisissant fondamentale en $\mathfrak{z}$, θ-invariante et en supposant $\mathfrak{a} = \mathfrak{l}_R \subset \mathfrak{a}_0$. On emploie ici les notations et les résultats de Harish-Chandra [(10), sections 8 et 17, et (11)]. En outre on note ε_R une certaine fonction à valeurs ± 1; $\eta_P = \delta_P - \delta_I = (1/2) \sum \alpha$, où $\alpha \in P \backslash P_I$; $P_{\mathfrak{z}}$ les éléments de P qui sont des racines de $(\mathfrak{z}_c, \mathfrak{l}_c)$;

$$P' = P \backslash P_{\mathfrak{z}}; \qquad \varpi_{\mathfrak{z}} = \prod H_\alpha, \qquad \text{où} \quad \alpha \in P_{\mathfrak{z}}; \qquad '\varpi_{\mathfrak{z}} = \exp(-\delta_I) \circ \varpi_{\mathfrak{z}} \circ \exp(\delta_I).$$

Alors il y a un nombre fini de constantes $c_0 > 0$ telles que, pour tout $f \in I_c^\infty(G)$ et $\gamma \in \Gamma$, on ait :

$$(3) \qquad \int_{G/G_\gamma} f(x \gamma x^{-1})\, d\bar{x} = c_0\, \varepsilon_R(\gamma)\, e^{-\eta_P(\log \gamma_R)} \prod_{\alpha \in P'} (1 - \xi_{-\alpha}(\gamma))^{-1} [G_\gamma : G_\gamma^0]^{-1} ('\varpi_{\mathfrak{z}}\, 'F_{f,L}^G)(\gamma).$$

Ensuite $'F_{f,L}^G(\gamma) = 'F_{f^{(Q)},L_I}^M(\gamma_I)(\gamma_R)$, où $Q = MAN$ est une décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique à composante déployée $A = L_R$. On pose $^*A = M \cap A_0$ et on a $A_0 = {}^*AA \cong {}^*A \times A$. Parce que la mesure invariante sur l'orbite d'un élément régulier $\gamma_I \in L_I'$ est tempérée, on obtient une distribution $D_{\gamma_I}^{*A} \in \mathscr{C}'({}^*A)^{\varpi}$ telle qu'on ait :

$$'F_{f^{(Q)},L_I}^M(\gamma_I)(\gamma_R) = \langle D_{\gamma_I}^{*A}, f^{(Q)}(\cdot\, \gamma_R) \rangle.$$

Par une transformation de Fourier partielle on en déduit :

$$(4) \qquad ('\varpi_{\mathfrak{z}}\, 'F_{f,L}^G)(\gamma) = \langle '\varpi_{\mathfrak{z}}\, D_{\gamma_I}^{*A} \otimes \delta_{\gamma_R}^A, f_{A_0} \rangle = \langle T_\gamma, f_{A_0} \rangle,$$

où $\delta_{\gamma_R}^A$ est la mesure de Dirac en A de support $\{\gamma_R\}$. Dans cette Note on ne discutera pas la structure détaillée des T_γ. On note $\|\,.\,\|$ la norme sur $\mathfrak{a}_0$ provenant de la forme de Killing et on se limite ici à remarquer que T_γ est une distribution avec support à distance $\|\log \gamma_R\| = l(\gamma)$ de l'identité, où $l(\gamma)$ est la longueur des géodésiques fermées associées à $C(\gamma)$. La formule de Poisson s'obtient en combinant les formules (1)–(4).

Corollaire 1. — *Il existe un ouvert $1 \in U \subset A_0$ tel que, si $h \in C_c^\infty(A_0)^{\varpi}$ avec* supp $(h) \subset U$ *et $\mu \in \mathscr{F}_{0I}$, on ait :*

$$\sum_{\lambda \in S} m(\lambda)\, \hat{h}(\lambda - \mu) = \operatorname{vol}(\Gamma \backslash G) \int_{\mathscr{F}_{0I}} \hat{h}(\lambda)\, \beta(\lambda + \mu)\, d\lambda = \operatorname{vol}(\Gamma \backslash G)\, h(1)\, \beta(\mu) + E(\mu),$$

où

$$E(\mu) = O(\|\mu\|^{n-r-1}), \qquad \|\mu\| \to +\infty.$$

IV. Estimations. — On définit pour

$$\mu\in\mathscr{F}_{0\mathrm{I}} \quad \text{et} \quad t>0, \quad S(\mu;t)=\{\lambda\in S : \|\lambda-\mu\|\leqq t\}.$$

Pour tout $s\in\mathfrak{w}$ on pose $\mathscr{F}_0(s)=\{\mu\in\mathscr{F}_0 : s\mu=-\mu^{\mathrm{conj}}\}$. On sait que

$$S\subset\bigcup\{\mathscr{F}_0(s) : s\in\mathfrak{m}\}.$$

Soit $\mathscr{T}$ la famille des sous-espaces linéaires $T\subset\mathscr{F}_0$ qui sont des intersections arbitraires d'espaces $\mathscr{F}_0(s)$ $(s\in\mathfrak{w})$, et soit $r(T)=\dim(\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}\cap T)$. Pour $T_0\in\mathscr{T}$ on écrit

$$\mathscr{T}(T_0)=\{T\in\mathscr{T} : \mathscr{F}_{0\mathrm{I}}\cap T_0\subset\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}\cap T\}.$$

Théorème 2. — *On suppose* $t_0>0$, $T_0\in\mathscr{T}$, $0<\varepsilon\leqq 1$. *Soit* $\delta=n^{-1}r^{-1}\varepsilon$. *Alors il y a des constantes* $p=p(t_0:T_0:\varepsilon)>1$, $c=c(t_0:T_0:\varepsilon)>0$ et $c_1=c_1(t_0)>0$ *telles que, pour tout* $\mu\in\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}\cap T_0$ *avec* $\|\mu\|\geqq p$, *pour tout* $t\geqq t_0$ *et pour tout* $T\in\mathscr{T}(T_0)$, *on ait :*

$$\sum_{\lambda\in S(\mu;t)\cap T} m(\lambda)\leqq c_1 t^r\beta(\mu)+t^c O(\|\mu\|^{n-r-1+r(T_0)n\delta}), \qquad \|\mu\|\to+\infty.$$

La démonstration est assez technique; elle se fait par récurrence sur $r(T_0)$. A l'aide du corollaire 1 on construit des fonctions $h(t_0:t)\in C_c^\infty(A_0)^{\mathfrak{w}}$ telles qu'on ait :

$$(5)\qquad \sum_{\lambda\in S(\mu;t)\cap T} m(\lambda)\leqq\sum_{\lambda\in S(T_0)} m(\lambda)\hat{h}(t_0:t:\lambda-\mu)$$
$$=c_1 t^r\beta(\mu)+E(t_0:t:\mu)-\sum_{\lambda\in S\setminus S(T_0)} m(\lambda)\hat{h}(t_0:t:\lambda-\mu),$$

où $S(T_0)=\bigcup\{S\cap T : T\in\mathscr{T}(T_0)\}$. Lorsque $r(T_0)>0$, on a $r(T_0\cap T)<r(T_0)$ pour tout $T\in\mathscr{T}\setminus\mathscr{T}(T_0)$. D'après l'hypothèse de récurrence et le théorème de Paley-Wiener on peut estimer le dernier terme dans la formule (5).

Pour tout $s\in\mathfrak{w}\setminus\{I\}$ et $\lambda\in\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}\cap\mathscr{F}_0(s)$ on a $\beta(\lambda)=0$. On pose $\rho=(1/2)\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,|\mathfrak{n}_0)$, et on sait que $\|\lambda_R\|\leqq\|\rho\|$ pour $\lambda\in S$. De ces remarques on déduit des résultats pour le spectre complémentaire :

Corollaire 3. — *Soit* $\varepsilon>0$. *Pour* $s\in\mathfrak{w}\setminus\{I\}$ *on pose* $r(s)=r(\mathscr{F}_0(s))$, *et on a*

$$\sum_{\lambda\in S(0;t)\cap\mathscr{F}_0(s)} m(\lambda)=O(t^{n-(r+1-r(s))+\varepsilon}), \qquad t\to+\infty;$$
$$\sum_{\lambda\in S(0;t)\setminus\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}} m(\lambda)=O(t^{n-2+\varepsilon}), \qquad t\to+\infty.$$

En généralisant la technique de Hörmander [([1]), ([2])] on obtient :

Théorème 4 [*cf.* ([4])]. — *Soit* V *un voisinage de l'origine dans* $\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}$ *tel que* V *soit* $\mathfrak{w}$*-invariant, fermé et borné et tel que l'intersection de* V *avec une chambre de Weyl de* $\mathscr{F}_{0\mathrm{I}}$ *soit convexe. Alors on a :*

$$\sum_{\lambda\in S\cap tV} m(\lambda)=\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\int_{tV}\beta(\mu)\,d\mu+O(t^{n-1}), \qquad t\to+\infty.$$

V. Cas particulier où $\dim A_0=1$. — Alors la formule de Poisson se présente sous la forme simple suivante :

$$\sum_{0\leqq i\leqq q} m(\lambda_i)e^{\lambda_i\circ\log}+\sum_{n\in\mathbf{N}} m(\mu_n)e^{\mu_n\circ\log}-\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\hat{\beta}$$
$$=\sum_{C(\gamma)\neq\{1\,e\}}\exp(-\rho(\log\gamma_R))\,l(\gamma)\,c(\gamma)\,\delta_{\gamma_R},$$

où $\lambda_0 = \rho, \lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathscr{F}_{0R}$, $\mu_n \in \mathscr{F}_{0I} (n \in \mathbb{N})$ et $c(\gamma) \to 0$ si $l(\gamma) \to +\infty$. Le premier terme du premier membre est à croissance exponentielle; d'après le théorème 4 le deuxième membre est à croissance polynomiale. Ces observations permettent d'obtenir un développement asymptotique complet du nombre $N(t)$ des $C(\gamma)$ avec $l(\gamma) \leqq t$. On en déduit :

PROPOSITION 5. — *La notation étant celle du théorème* 4, *on a* :

$$\sum_{\lambda \in S \cap tV} m(\lambda) = \operatorname{vol}(\Gamma\backslash G) \int_{tV} \beta(\mu)\, d\mu + O(t^{n-1}/\log t), \qquad t \to +\infty.$$

(*) Séance du 7 février 1977.

(1) L. HÖRMANDER, *Acta Math.*, 121, 1968, p. 193-218.

(2) J. J. DUISTERMAAT et V. W. GUILLEMIN, *Invent. Math.*, 29, 1975, p. 39-79.

(3) A. SELBERG, *Proc. Int. Congr. of Math.*, p. 177-189, Stockholm, 1962.

(4) I. M. GEL'FAND, *Proc. Int. Congr. of Math.*, p. 74-85, Stockholm, 1962.

(5) R. GANGOLLI, *Acta Math.*, 121, 1968, p. 151-192.

(6) H. HUBER, *Math. Ann.*, 138, 1959, p. 1-26.

(7) HARISH-CHANDRA, *Acta Math.*, 116, 1966, p. 1-111.

(8) R. GANGOLLI, *Ann. of Math.*, 93, 1971, p. 150-165.

(9) HARISH-CHANDRA, *Amer. J. Math.*, 80, 1958, p. 553-613.

(10) HARISH-CHANDRA, *J. Funct. Anal.*, 19, 1975, p. 104-204.

(11) V. S. VARADARAJAN, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups*, Springer-Verlag (à paraître).

Mathematisch Instituut R.U.U.,
Budapestlaan,
Utrecht,
Pays-Bas.