FOURIERTHEORIE

Yu.A. Kuznetsov en J. Stienstra

Voorwoord

Fouriertheorie geeft middelen (*Fourierreeksen, Fourierintegralen*) die voor de natuurkunde en techniek (o.a. optica, kristallografie, quantummechanica, signaalverwerking) van fundamenteel belang zijn en laat zien hoe hiermee enkele belangrijke gewone differentiaalvergelijkingen (bvb. voor mechanische en elektrische oscillatoren) en partiële differentiaalvergelijkingen (zoals de golf- en warmtevergelijking) efficiënt kunnen worden behandeld.

Uitgangspunt van deze theorie is dat veel functies kunnen worden opgebouwd als een "soort lineaire combinatie" van zekere eenvoudige basisfuncties. Deze eenvoudige basisfuncties kunnen het best worden beschreven als *e-machten van complexe getallen*; sinussen en cosinussen doen het ook goed als basisfuncties, maar zijn toch iets minder handig dan de complexe e-machten.

Het "soort lineaire combinaties" dat men nodig heeft is van de vorm

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad \text{of} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}dt\,.$$

Veel (theoretisch) werk gaat zitten in het aangeven van het juiste kader voor dergelijke sommen van oneindig veel getallen resp. voor integralen over een oneindig lang interval. *Limieten* en *convergentie* zijn hier de fundamentele begrippen.

Verder geven we een inleiding in de theorie van *Distributies*, o.a. de Dirac deltafunctie $\delta(x)$ waarvoor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0),$$

de functies van Green en de Fouriertransformaties van distributies. Deze resultaten hebben veel toepassingen in de klassieke en quantumveldentheorie.

De meer theoretische delen van dit diktaat zijn geschreven in de wiskunde-stijl met *stellingen* en *bewijzen*. Voor de natuurkundestudent die dit diktaat leest, is het belangrijk om de uitspraken in de stellingen te begrijpen en toe te passen. Bewijzen (meestal aangeduid met *voor de liefhebber*) zijn in dit diktaat opgenomen voor degenen die ook eens willen zien hoe wiskundigen redeneren om het juiste kader voor dergelijke sommen en integralen aan te geven.

We zijn dankbaar J. Kolk en E. Belitser voor hun uitgebreide opmerkingen over sommige hoofdstukken van het diktaat.

Yuri Kuznetsov

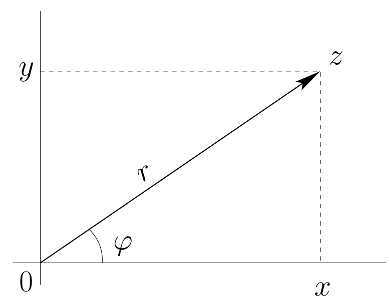
Jan Stienstra

1 Reeksen

1.1 Complexe getallen

Omdat complexe getallen van onmisbaar belang zijn voor een efficiënte beschrijving van Fourier theorie, geven we hier eerst een korte inleiding in complexe getallen.

Een *complex getal* is een vector $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in het vlak met de Cartesische coordinaten x en y.



Voor een complex getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ noemt men x het *reële deel* van z en y het *imaginaire deel* van z; notatie

$$x = \operatorname{Re} z\,, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

De *complex geconjugeerde* van het complexe getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is het complexe getal

$$\overline{z} := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

dat het spiegel-beeld is van de vector z t.a.v. de horizontale as. De *absolute waarde* van het complexe getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is zijn lengte

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat $|z| \geq 0$. Als $r = |z| \neq 0$ and φ de hoek is die de vector $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met de horizontale as maakt, dan geldt

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

en dus
$$z = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

De hoek φ heet het *argument* van het complexe getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; notatie
$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Het argument is gedefinieerd alleen voor de complexe getallen $z \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Twee zulke complexe getallen
$$z_1 = \begin{pmatrix} r_1\cos\varphi_1 \\ r_1\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad z_2 = \begin{pmatrix} r_2\cos\varphi_2 \\ r_2\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$
zijn gelijk dan en slechts dan als
$$r_1 = r_2 \quad \text{en} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,$$
waarin $k \in \mathbb{Z}$ een geheel getal is; $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

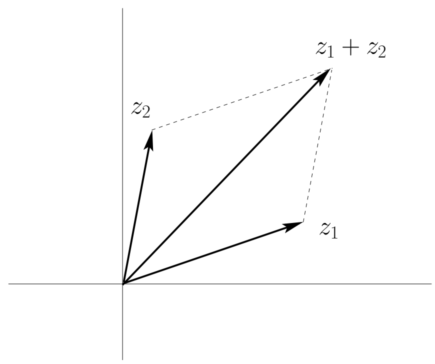
De verzameling van alle reële getallen noteert men als $\mathbb{R}$*. De verzameling van alle complexe getallen noteert men als* $\mathbb{C}$*.*

Optelling en *vermenigvuldiging* van complexe getallen wordt gedefinieerd door, resp.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$
en
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Men kan nagaan dat hiervoor de gebruikelijke rekenregels gelden: voor alle complexe getallen z_1, z_2, z_3 geldt
$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ (z_1z_2)z_3 &= z_1(z_2z_3) \\ z_1z_2 &= z_2z_1 \\ z_1(z_2 + z_3) &= z_1z_2 + z_1z_3 \end{aligned}$$

Omdat de optelling van complexe getallen (1) de gewone optelling van vectoren op het vlak met de parallelogramregel is, geldt dat

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(de ***driehoeksongelijkheid***).



Reële getallen ziet men als bijzondere complexe getallen: namelijk die waarvan het imaginaire deel 0 is:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Voor die getallen geldt inderdaad

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verder hebben we

$$0 + z = z, \quad 0z = 0, \quad 1z = z.$$

Merk op dat de aftrekking van complexe getallen is gedefinieerd door

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2.$$

Het complexe getal met reëel deel 0 en imaginair deel 1 wordt kortweg genoteerd als i:

$$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een bijzonder geval van de vermenigvuldigregel (2) is

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Een complex getal z kunnen we nu schrijven als

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = x + iy$$

Omgekeerd kan men de vermenigvuldigregel (2) terugvinden door de bovengenoemde rekenregels te gebruiken in combinatie met $i^2 = -1$.

Ieder complex getal $z \neq 0$ heeft een inverse t.a.v. de vermenigvuldiging: inderdaad, uit $z \neq 0$ volgt $|z| \neq 0$ en verder is

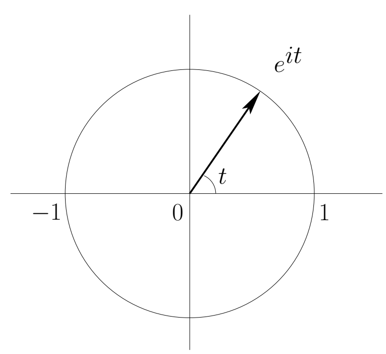
$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2;$$

dus

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1\,, \qquad \text{oftewel} \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Voor een reëel getal t definieert men het complexe getal e^{it} door

$$e^{it} := \cos t \,+\, i \sin t. \tag{3}$$



In het bijzonder is

$$e^{i0} = 1\,, \quad e^{i\pi} = -1\,, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i\,, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Verder laat definitie (3) meteen zien

$$e^{it} = e^{is} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{er is een geheel getal } \ k \in \mathbb{Z} \ \text{ zodat } \ s = t + 2\pi k. \tag{4}$$

De complexe getallen die men met definitie (3) krijgt zijn precies de complexe getallen met absolute waarde 1; inderdaad:

$$\begin{array}{l} \left|e^{it}\right| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1; \\ \text{als } \; z = x + iy \; \text{ en } \; |z| = 1, \; \text{ dan } \; x^2 + y^2 = 1 \\ \text{en dus is er een } \; t \in \mathbb{R} \text{ zo dat } \; x = \cos t\,, \; y = \sin t. \end{array}$$

Voor reële getallen s, t is

$$e^{is}e^{it} = e^{i(s+t)}. \tag{5}$$

Deze regel is equivalent met de bekende trigonometrische formules

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos s\, \cos t \,-\, \sin s\, \sin t \\ \sin(s+t) &= \sin s\, \cos t \,+\, \cos s\, \sin t. \end{aligned}$$

Uit (5) volgt dat $(e^{it})^n = e^{int}$. Als $r = |z|$ is and $\varphi = \operatorname{Arg} z$, dan geldt

$$z = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

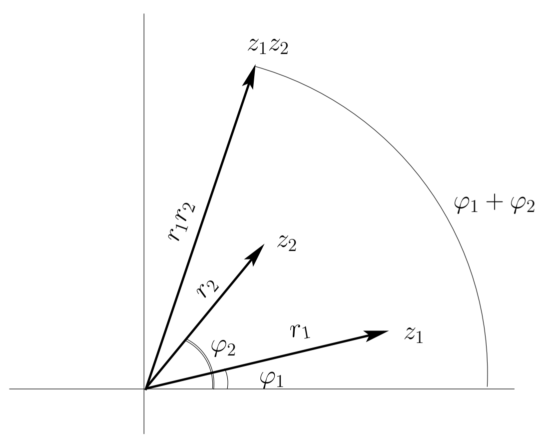
ofwel

$$z = re^{i\varphi}.$$

De regel (5) impliceert ook dat voor twee complexe gelallen $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ en $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ geldt $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, zodat

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1|\,|z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Uit de laatste formules volgt de eenvoudige meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging van complexe getallen.



$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Wat is $\sqrt[3]{1}$ als we 1 als een complex getal beschouwen? Met andere woorden, wat zijn de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 1$ in $\mathbb{C}$?

Zoek oplossingen in de form $z = e^{i\varphi}$. Dan is de vergelijking equivalent met

$$r^3 e^{3i\varphi} = e^{i0}.$$

Dit impliceert dat $r = 1$ en $3\varphi = 0 + 2\pi k$ met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dus

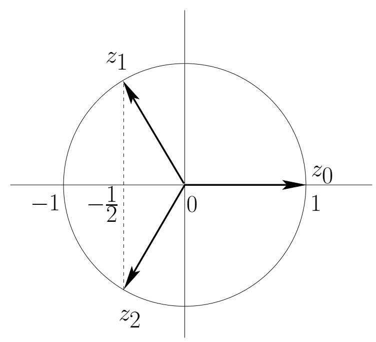
$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

waarvan alleen $k = 0, 1$ en 2 tot verschillende complexe getalen leiden. Dus krijgen we

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{3},$$

zodat er *drie* complexe oplossingen ontstaan: $z_0 = 1$ en

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



Merk op dat $z_2 = \bar{z}_1$. $\diamondsuit$

1.2 Partiële sommen en convergentie

Een *rij complexe getallen* is ..... een rij complexe getallen; precies wat je denkt bij het nederlandse woord “rij”. Vanwege de analogie met functies op $\mathbb{R}$ is het echter ook nuttig om zo’n rij te zien als een functie op de discrete ruimte $\mathbb{Z}$ van alle gehele getallen. Ondanks de analogie zijn er wel verschillen in notatie: bij een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt de waarde in x genoteerd als $f(x)$ en wordt de functie zelf vaak aangegeven als f; bij een rij $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ wordt de functiewaarde in n genoteerd als a_n (i.p.v. $a(n)$) en gebruiken we om de rij als geheel aan te geven de notatie $\{a_n\}$ (i.p.v. a). De getallen a_n noemt men de termen van de rij.

Veel rijen $\{a_n\}$ die we in de praktijk tegenkomen hebben een begin. In de meer formele beschrijving kan men dat formuleren als: er is een geheel getal p zo dat $a_n = 0$ voor alle gehele getallen $n < p$. Als we dit begin expliciet in de notatie tot uitdrukking willen brengen schrijven we $\{a_n\}_{n \geq p}$. Dus is de rij $\{a_n\}_{n \geq 0}$ een functie is op $\mathbb{N}$, de verzameling van alle niet-negatieve gehele getallen.

Definitie 1.1 Men zegt dat een rij complexe getallen $\{a_n\}_{n \geq 0}$ *convergeert* als er een complex getal u is zodat de rij reële getallen $\{|a_n - u|\}_{n \geq 0}$ limiet 0 heeft, dwz.

bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een index N zodat voor alle $n \geq N$ geldt $|a_n - u| < \varepsilon$.

Het getal u noemt men dan de *limiet* van de rij $\{a_n\}_{n \geq 0}$; notatie

$$u = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{of} \quad \{a_n\} \to u.$$

Een niet convergente rij heet *divergent*.

Samengevat

$$u = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \{a_n\} \to u \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} |a_n - u| = 0.$$

♡ **Opmerkingen**

1. Omdat
$$|a_n - u| \leq |\text{Re } a_n - \text{Re } u| + |\text{Im } a_n - \text{Im } u|$$
en
$$|\text{Re } a_n - \text{Re } u| \leq |a_n - u|, \quad |\text{Im } a_n - \text{Im } u| \leq |a_n - u|,$$
is de convergentie van een rij complexe getallen equivalent met de convergentie van twee reële rijen (die van zijn reële en imaginaire delen).

Hieruit volgt dat voor twee complexe convergente rijen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ en $\{b_n\}_{n\geq 0}$ met

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

geldt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab\ .$$

Is bovendien $b \neq 0$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\ .$$

2. Als $\{a_n\} \to u$ dan convergeert iedere *deelrij* van $\{a_n\}$ naar u, bijvoorbeeld

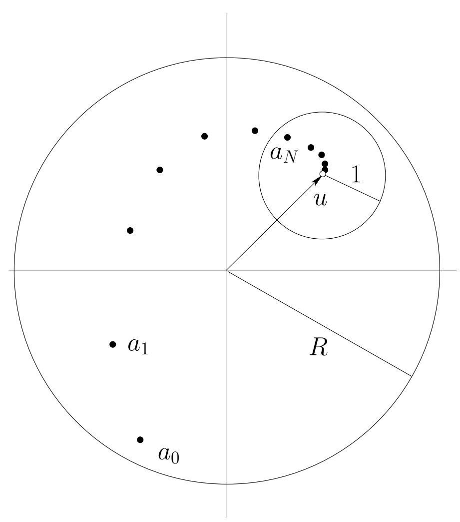
$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = u.$$

Omgekeerd, als de rijen van even en oneven termen convergeren naar hetzelfde getal u dan convergeert de rij naar u. $\heartsuit$

Definitie 1.2 Een rij complexe getallen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ heet *begrensd* als er een reëel getal $R > 0$ is zodat voor alle $n \geq 0$ geldt $|a_n| \leq R$.

Lemma 1.3 *Als $\{a_n\}_{n\geq 0}$ convergeert, dan is deze rij begrensd.*

Bewijs: Er is een complex getal u zodat $u = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dus bestaat er een index N zodat $|a_n - u| < 1$ voor alle $n \geq N$. (Neem $\varepsilon = 1$ in Definitie 1.1).



Dit betekent dat slechts eindig veel punten

$$(\text{Re } a_n, \text{Im } a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

buiten een cirkel van straal 1 met het middelpunt $(\text{Re}\, u, \text{Im}\, u)$ liggen. Dus is er een voldoend grote cirkel met het middelpunt $(0,0)$ die alle punten $(\text{Re}\, a_n, \text{Im}\, a_n)$ bevat. $\square$

Men gebruikt het lemma vaak om te bewijzen dat een rij divergent is: Stel dat een rij *niet begrensd* is, dan kan hij niet convergent te zijn.

In het Nederlands is er vaak maar weinig verschil in betekenis tussen de woorden "rij" en "reeks". In de wiskunde is er wel een duidelijk verschil: wanneer we praten over een *reeks*, dan wordt daarmee meteen aangegeven dat we de intentie hebben om de getallen van de rij op te tellen. Laat $\{a_n\}_{n\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. De daarbij horende reeks wordt genoteerd als $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$, ook wel als $\sum_{n\geq 0} a_n$ of, nog korter, als $\sum a_n$. Voordat we aan een reeks, dwz. aan zo'n *som van oneindig veel getallen*, een getalwaarde kunnen toekennen, moeten we eerst convergentiekwesties onderzoeken.

Definitie 1.4 Laat $\{a_n\}_{n\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. Voor $k \geq 0$ noemt men de eindige som $A_k = a_0 + a_1 + ... + a_k$ de $k-$*de partiële som* van de reeks. De reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ heet *convergent* als $\lim_{k\to\infty} A_k$ bestaat. Deze limiet noemen we dan de *som* van de reeks en we noteren hem als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n.$$

Een niet convergente reeks heet *divergent*.

Definitie 1.5 Laat $\{a_n\}$ een rij complexe getallen zijn, waarbij niet wordt verlangd dat $a_n = 0$ is voor alle $n < 0$. Zonodig wordt dit nog in de notatie benadrukt door te schrijven $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Men zegt dan dat de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ convergeert als *beide reeksen* $\sum_{n\geq 0} a_n$ en $\sum_{m\geq 1} a_{-m}$ convergeren in de zin van definitie 1.4. In dat geval definieert men de som van de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ door

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}.$$

Wanneer $\sum_{n\geq 0} a_n$ of $\sum_{m\geq 1} a_{-m}$ niet convergeert zegt men dat de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ *divergeert.*

♡ **Opmerking.** In het bovenstaande hebben we het verschil tussen een reeks en zijn som tot uitdrukking gebracht in de notaties. Een reeks wordt genoteerd met $\sum_{n\geq 0} a_n$ resp. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ terwijl bij convergentie zijn som genoteerd wordt met $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ resp. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$. We zullen deze notatieconventie niet altijd strikt handhaven en ook wel eens $\sum_{n\geq 0} a_n$ of $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ schrijven voor de som van de reeks. ♡

♢ **Voorbeelden**

1. Beschouw de meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$ (hierin is $a_n = 2^{-n}$). We beweren dat voor elke $k \geq 0$ de partiële som A_k wordt gegeven door

$$A_k = 2 - 2^{-k}.$$

   Om deze bewering te bewijzen, gebruiken we volledige induktie als volgt:

   Start van de induktie: Voor $k = 0$ is de bewering juist, want $A_0 = a_0 = 2^{-0} = 1 = 2 - 2^{-0}$.
   Induktiestap: als $A_k = 2 - 2^{-k}$ dan is

$$A_{k+1} = A_k + 2^{-k-1} = 2 - 2^{-k} + 2^{-k-1} = 2 - 2\cdot 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2 - 2^{-k-1}.$$

   Volgens het *principe van volledige induktie* mogen we nu concluderen dat de bewering $A_k = 2 - 2^{-k}$ juist is voor elk geheel getal $k \geq 0$.

   Er geldt derhalve dat $\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty}(2 - 2^{-k}) = 2$, en dus is de reeks convergent met som

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

2. Beschouw nu algemener de meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0} z^n$ met z een vast complex getal. De partiële som $A_k(z)$ van deze reeks wordt gegeven door:

$$A_k(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^k.$$

Met de volgende truc krijgen we een eenvoudige formule om $A_k(z)$ voor $z \neq 1$ te berekenen:

$$(1-z)A_k(z) = (1 + z + \cdots + z^k) - (z + z^2 + \cdots + z^{k+1}) = 1 - z^{k+1}.$$

Dus

$$A_k(z) = \frac{1 - z^{k+1}}{1-z} \qquad \text{mits} \quad z \neq 1. \tag{6}$$

Hieraan zien we dat de meetkundige reeks convergeert dan en slechts dan als $z \neq 1$ is en $\lim_{k\to\infty} z^{k+1}$ bestaat; dus, dan en slechts dan als $|z| < 1$. Als $|z| < 1$ is, dan is

$$\lim_{k\to\infty} A_k(z) = \frac{1 - \lim_{k\to\infty} z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Dus wordt de som van een convergente meetkundige reeks gegeven door:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{mits} \quad |z| < 1.$$

Voor $|z| \geq 1$ is de meetkundige reeks divergent.

3. Als laatste voorbeeld beschouwen we de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

   Omdat $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, zijn de partiële sommen van de reeks gemakkelijk te berekenen:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

   We zien hieraan dat $\lim_{k\to\infty} A_k = 1$; de reeks is derhalve convergent, en

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

$\diamondsuit$

In de bovenstaande voorbeelden zien we dat de termen van convergente reeksen naar nul gaan. Dat geldt algemeen:

Lemma 1.6 *Als* $\sum a_n$ *convergent is, dan is* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bewijs: Veronderstel dat $\sum a_n$ convergent is met som A. Dan is

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

$\square$

Het lemma zegt dat een *noodzakelijke voorwaarde* voor convergentie van de reeks $\sum a_n$ is dat de limiet $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat en gelijk is aan 0. Als de limiet $\lim_{n\to\infty} a_n$ niet bestaat of wel bestaat, maar ongelijk is aan 0, dan is de reeks divergent. Voorbeelden van reeksen die om die reden divergent zijn, zijn

$$\sum_{n\geq 0} n\,, \qquad \sum_{n\geq 0} (-1)^n\,, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n+1}.$$

We waarschuwen er hier voor dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ beslist *niet een voldoende voorwaarde is* voor convergentie van de reeks $\sum a_n$.

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Neem bijvoorbeeld de zogeheten *harmonische reeks*:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ ,$$

dwz. $a_n = n^{-1}$ voor $n \geq 1$. Hiervoor is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Voor de partiële sommen $A_k = \sum_{n=1}^{k} n^{-1}$ geldt echter

$$\begin{aligned}
A_2 &= 1 + \frac{1}{2} > 1 \\
A_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\
A_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

etc. zodat voor $m \geq 1$ geldt

$$A_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}.$$

Dus is de rij $\{A_k\}$ niet begrensd, dus divergent. $\diamondsuit$

We zeggen dat twee rijen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ en $\{b_n\}_{n\geq 0}$ *op den duur gelijk zijn* als er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $a_n = b_n$ voor alle $n \geq N$. In dat geval geldt voor de partiële sommen A_k resp. B_k van de reeksen $\sum_{n\geq 0} a_n$ resp. $\sum_{n\geq 0} b_n$, dat $A_k - A_N = B_k - B_N$ als $k \geq N$. Hieraan zien we dat $\lim_{k\to\infty} A_k$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{k\to\infty} B_k$ bestaat. Samenvattend:

Stel dat op den duur geldt dat $a_n = b_n$. Dan convergeert de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ dan en slechts dan als $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergeert.

In het bijzonder zien we voor willekeurige $N \geq 0$ dat een reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergeert dan en slechts dan als de reeks $\sum_{n\geq N} a_n$ convergeert; kortom *het convergentiegedrag wordt alleen bepaald door de staart van de reeks.*

Uit de definitie van convergentie van een reeks leidt men op eenvoudige wijze de volgende rekenregel af:

Lemma 1.7 *Zijn $\sum_{n\geq 0} a_n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent en $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dan convergeert ook $\sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n)$ en er geldt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) .$$

1.3 Cauchy-rijen en absolute convergentie

In het voorbeeld onder Definitie 1.4 zagen we in dat de reeks $\sum 2^{-n}$ convergeert door eerst de partiële som A_k te berekenen. Bij andere reeksen is dit veelal onmogelijk. Toch zouden we ook dan graag kunnen besluiten of de reeks al dan niet convergeert.

Veronderstel eerst dat de rij $\{A_n\}$ convergeert met limiet A. Dan bestaat er voor iedere $\epsilon > 0$ een getal N zo dat voor $k \geq N$ geldt: $|A_k - A| < \frac{1}{2}\epsilon$. Voor alle $m, n \geq N$ geldt dan dat

$$|A_m - A_n| \leq |A_m - A| + |A - A_n| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon,$$

Definitie 1.8 Een rij complexe getallen $\{A_n\}$ heet een *Cauchy-rij* als bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een index N zodat voor alle $m, n \geq N$ geldt $|A_m - A_n| < \varepsilon$.

We hebben dus het volgende lemma bewezen.

Lemma 1.9 *Iedere convergente rij in $\mathbb{C}$ is een Cauchy-rij.*

Het is mogelijk de reële getallen op een zodanige wijze in te voeren dat de omgekeerde uitspraak *bewezen* kan worden: Iedere reële Cauchy-rij is convergent. Omdat de convergentie van een rij complexe getallen equivalent is met de convergentie van twee reële rijen (die van reële en imaginaire delen), geldt deze omgekeerde uitspraak ook voor rijen complexe getallen. Wij laten dat hier achterwege maar leggen de intuïtie dat $\mathbb{R}$ (en dus $\mathbb{C}$) 'geen gaten' heeft vast in een axioma.

Axioma 1.10 (Volledigheid van $\mathbb{C}$) *Een rij complexe getallen $\{A_n\}$ convergeert dan en slechts dan deze rij een Cauchy-rij is.*

We weten al dat de harmonische reeks

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

divergent is. Dit kunnen we nu op een andere manier bewijzen. Voor de partiële sommen $A_k = \sum_{n=1}^{k} n^{-1}$ geldt

$$\begin{array}{rcl} A_{2k} - A_k & = & \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \\ & \geq & \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \ldots + \frac{1}{2k} \qquad (\ k \ \text{ termen}) \\ & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

en dus is de rij $\{A_n\}$ geen Cauchy-rij. Wegens Axioma 1.10 is deze rij divergent.

Definitie 1.11 Een rij reële getallen $\{B_k\}$ heet *monotoon stijgend* als $B_{k+1} \geq B_k$ voor alle $k \geq 1$.

De volledigheid van $\mathbb{R}$ impliceert de volgende belangrijke stelling over monotone rijen.

Stelling 1.12 *Zij $\{B_k\}_{k\geq 0}$ een monotoon stijgende rij reële getallen die bovendien naar boven begrensd is, dwz. er bestaat een $R > 0$ zo dat $B_k \leq R$ voor alle k. Dan is er een reëel getal $B \leq R$ met $B = \lim_{k\to\infty} B_k$.*

Bewijs: (voor de liefhebber) Veronderstel dat $\{B_k\}_{k\geq 0}$ geen Cauchy-rij is. Dit betekent dat er een vast reëel getal $\varepsilon > 0$ is zodat bij elke index N indices $m, n \geq N$ zijn, waarvoor $|B_m - B_n| \geq \varepsilon$.

Omdat $\{B_k\}$ monotoon stijgend is, bestaat dan er bij elke index N een index $M > N$ zodat

$$B_M - B_N \geq \varepsilon \quad \text{ofwel} \quad B_M \geq B_N + \varepsilon.$$

Dan zijn er indices $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ zo dat

$$0 < M_1 < M_2 < \cdots < M_k < \cdots$$

en

$$\begin{array}{rcl} B_{M_1} & \geq & B_0 + \varepsilon, \\ B_{M_2} & \geq & B_{M_1} + \varepsilon \geq B_0 + 2\varepsilon, \\ B_{M_3} & \geq & B_{M_2} + \varepsilon \geq B_0 + 3\varepsilon, \\ \cdots & & \\ B_{M_k} & \geq & B_0 + k\varepsilon\ . \end{array}$$

Dit impliceert dat $\{B_k\}$ niet naar boven begrensd is, een tegenspraak. Dus is $\{B_k\}$ een Cauchy-rij, dus convergent. Gaan we nu naar de limiet $k \to \infty$ in $B_k \leq R$, dan krijgen we $B \leq R$. ■

Dit resultaat kunnen we gebruiken om de convergentie van sommige reeksen met positieve termen vast te stellen.

◇ **Voorbeeld.** We lichten dit toe aan de hand van de reeks $\sum_{n\geq 1} b_n$ met

$$b_n = \frac{1}{n2^n}.$$

Omdat $b_n \leq 2^{-n}$, geldt voor de partiële sommen: $B_k \leq 1$. Omdat de termen van de reeks positief zijn, geldt ook dat $B_k \leq B_{k+1}$ voor alle $k \geq 1$, zodat de rij $\{B_k\}_{k\geq 1}$ monotoon stijgend is. Uit Stelling 1.12 volgt de convergentie. ◇

Merk op dat we hierboven in feite het volgende resultaat afgeleid hebben.

Gevolg 1.13 *Zij $\sum_{n\geq 0} b_n$ een reeks met reële niet-negatieve termen. Als de rij $\{B_k\}_{k\geq 1}$ van partiële sommen naar boven begrensd is door R, dan convergeert de reeks en geldt voor zijn som $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq R$.*

Het belang van Cauchy-rijen komt verder ook tot uiting in de volgende stelling die we later veelvuldig zullen toepassen. Eerst geven we een definitie.

Definitie 1.14 Een (complexe) reeks $\sum a_n$ heet *absoluut convergent* als de reeks $\sum |a_n|$ convergent is.

Stelling 1.15 *Iedere absoluut convergente reeks is convergent. Als $\sum a_n$ absoluut convergeert, dan geldt:*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Bewijs: Beschouw een (complexe) reeks $\sum a_n$ en definieer $b_n = |a_n|$. Zij A_k de $k-$de partiële som van $\sum a_n$, en B_k die van $\sum b_n$. Dan geldt voor alle $q \geq p$ dat

$$\begin{aligned} |A_q - A_p| &= |a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q| \\ &\leq b_{p+1} + b_{p+2} + ... + b_q \\ &= |B_q - B_p| . \end{aligned} \tag{7}$$

Als $\sum a_n$ absoluut convergent is, dan bestaat $\lim_{k\to\infty} B_k$ per definitie. De rij $\{B_k\}$ is een Cauchy-rij. Uit de schatting (7) volgt nu dat ook de rij $\{A_k\}$ een Cauchy-rij is, dus convergeert.

Voor alle $m \geq k$ geldt dat $B_k \leq B_m$. Limiet overgang voor $m \to \infty$ geeft dat $B_k \leq \lim_{m\to\infty} B_m$. Door toepassing van de driehoeksongelijkheid voor eindige sommen volgt dat

$$\left|\sum_{n=0}^{k} a_n\right| \leq B_k \leq \lim_{m\to\infty} B_m = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Het bewijs wordt voltooid door de limiet voor $k \to \infty$ te nemen. ■

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Niet iedere convergente reeks is absoluut convergent. Zo is de *alternerende* reeks

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

niet absoluut convergent (dan krijgen we de *harmonische reeks*), maar wel convergent. Dit laatste ziet men als volgt in. Zij A_k weer de $k-$de partiële som. Dan is de rij $\{A_{2k}\}$ monotoon stijgend, dwz. $A_{2k} \leq A_{2k+2}$. Voorts geldt voor alle k dat $A_{2k} \leq 1$. Met behulp van Stelling 1.12 zien we nu dat $\lim_{k\to\infty} A_{2k} = L$ bestaat. Omdat $A_{2k+1} - A_{2k} = \frac{1}{2k+1}$, volgt door limietovergang dat $\lim_{k\to\infty} A_{2k+1}$ bestaat en gelijk is aan L. Derhalve is $\lim_{k\to\infty} A_k = L$. De alternerende reeks convergeert dus. $\diamondsuit$

Als een van de geavanceerdere toepassingen van het integraalkenmerk zullen we in paragraaf 1.5 zien dat $L = \ln 2$ zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2. \tag{8}$$

Merk op dat we hierboven in feite het volgende resultaat verkregen hebben.

Stelling 1.16 *Zij $\{b_n\}_{n\geq 0}$ een rij reële getallen waarvoor $b_{n+1} \leq b_n$ voor alle $n \geq 0$ en*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Dan is de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ convergent.

Onder een *omschikking* van een reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ verstaan we een reeks $\sum_{m\geq 0} b_m$ waarvan de termen gegeven worden door $b_m = a_{\varphi(m)}$ met φ een bijectieve afbeelding $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Stelling 1.17 *Iedere omschikking $\displaystyle\sum_{m\geq 0} b_m$ van een absoluut convergente complexe reeks $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ is ook weer absoluut convergent, terwijl*

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Bewijs: (voor de liefhebber) Zij $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectieve afbeelding zo dat $b_m = a_{\varphi(m)}$ voor elke $m \in \mathbb{N}$, en zij φ^{-1} de inverse afbeelding. Voor $N \in \mathbb{N}$ en $k > \max\{\varphi^{-1}(0), \ldots, \varphi^{-1}(N)\}$ is dan $\{\varphi^{-1}(0), \ldots, \varphi^{-1}(N)\} \subset \{0, \ldots, k\}$, dus $\{0, \ldots, N\} \subset \{\varphi(0), \ldots, \varphi(k)\}$, en bijgevolg

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{m=0}^{k} b_m\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{m=0}^{k} a_{\varphi(m)}\right| = \left|\sum_{m=0,\varphi(m)>N}^{k} a_{\varphi(m)}\right| \\ &\leq \sum_{m=0,\varphi(m)>N}^{k} |a_{\varphi(m)}| \\ &\leq \sum_{n>N} |a_n|. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{m=0}^{k} b_m\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{m=0}^{k} b_m\right| \leq 2\sum_{n>N} |a_n|.$$

Omdat $\sum a_n$ absoluut convergent is, is hier het rechterlid willekeurig klein te krijgen door N maar groot genoeg te nemen.

Zo zien we dat de reeks $\sum b_m$ convergeert en dat

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

De reeks $\sum |b_m|$ is een omschikking van de absoluut convergente reeks $\sum |a_n|$. Volgens wat we inmiddels al hebben bewezen is de reeks $\sum |b_m|$ dus ook convergent; m.a.w. de reeks $\sum b_m$ is absoluut convergent. ∎

Zonder bewijs vermelden we hier nog dat tevens het volgende geldt: is $\sum a_n$ een reële reeks die convergent maar niet absoluut convergent is, dan kan men bij ieder reëel getal A een omschikking van de reeks $\sum a_n$ vinden zo dat de nieuwe reeks A als som heeft. Zelfs kan men iedere niet-absoluut convergente complexe reeks tot een divergente reeks omschikken.

♢ **Voorbeeld.** Als illustratie beschouwen we de alternerende reeks (8), die convergent (naar $\ln 2$) maar niet absoluut convergent is. We kunnen schrijven

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots$$

Defineer

$$B_m = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right).$$

Dan convergeert de rij $\{B_m\}_{m\geq 1}$ naar $\ln 2$. Introduceer nu een omschikking van de reeks (8), nl.

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots$$

en defineer

$$C_m = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right).$$

Uit de gelijkheid

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}$$

volgt dan dat

$$C_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} B_m \ .$$

Dus convergeert ook de rij van de partiële sommen van de omschikking, maar

$$\lim_{m\to\infty} C_m = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} B_m = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{(!!!)}$$

$\diamondsuit$

1.4 Criteria voor convergentie

De volgende stelling wordt in de praktijk vaak toegepast om de absolute convergentie van een reeks vast te stellen.

Stelling 1.18 (Majorantie criterium). *Zij $\sum a_n$ een complexe reeks en $\sum t_n$ een reeks met niet-negatieve reële termen (dwz. $t_n \geq 0$). Veronderstel dat er een $c > 0$ bestaat zo dat*

$$|a_n| \leq c t_n \qquad \text{voor alle } n.$$

Dan geldt

$$\sum t_n \text{ convergent } \Rightarrow \sum a_n \text{ absoluut convergent } \Rightarrow \sum a_n \text{ convergent } .$$

(waarbij de laatste implicatie in feite Stelling 1.15 is.)

Bewijs: Defineer $b_n = ct_n$. Dan geldt $|a_n| \leq b_n$ voor alle $n \geq N$. Uit de convergentie van $\sum t_n$ volgt de convergentie van $\sum b_n$. Dus is de rij van de partiële sommen

$$B_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$$

een Cauchy-rij, dwz. bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een index N zodat voor alle $p, q \geq N$ geldt $|B_q - B_p| < \varepsilon$.

Laat

$$A_k = \sum_{n=0}^{k} |a_n|.$$

Voor alle $q \geq p$ geldt dan

$$\begin{aligned} |A_q - A_p| &= |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + ... + |a_q| \\ &\leq b_{p+1} + b_{p+2} + ... + b_q \\ &= |B_q - B_p| < \varepsilon, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat ook de rij $\{A_k\}$ een Cauchy-rij is, dus convergeert.

M.a.w.: de reeks $\sum a_n$ convergeert absoluut en door toepassing van Stelling 1.15 concluderen we uiteindelijk de convergentie. ■

♡ **Opmerking.** Omdat het convergentiegedrag alleen bepaald wordt door de staart van de reeks, is het voldoende dat op den duur

$$|a_n| \leq ct_n,$$

dwz. voor alle $n \geq K$ waarin $K > 0$ een geheel getal is. ♡

♢ **Voorbeeld.** Beschouw de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

We hebben $n^2 > (n-1)n > 0$ voor alle $n \geq 2$. Dus

$$a_n = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = t_n, \quad n \geq 2.$$

Maar

$$\sum_{n=2} t_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Dus is deze reeks convergent. Uit Stelling 1.18 en de opmerking daarna volgt dat de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

convergent is, dus convergeert ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Later zullen we mbv. Fourierreeksen die som precies berekenen. Dan zal blijken dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$\diamondsuit$

Het onderstaande resultaat is een direkt gevolg van Stelling 1.18 dat in de praktijk zo vaak voorkomt dat we het apart vermelden.

Gevolg 1.19 (Limiet criterium). *Zij $\sum a_n$ een reeks met complexe termen en zij $\sum t_n$ een reeks met positieve reële termen. Neem aan dat*

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{t_n}$$

bestaat als reëel getal. Dan geldt:

- *Als $\sum t_n$ convergeert, dan convergeert ook $\sum a_n$.*
- *Als $L \neq 0$ is en $\sum t_n$ divergeert, dan divergeert ook $\sum |a_n|$.*

Let op: *Op de tweede regel staat* niet *dat $\sum a_n$ divergeert!*

Bewijs: Uit de definitie van limiet volgt dat op den duur geldt

$$\frac{|a_n|}{t_n} \leq L + 1$$

Dus $|a_n| \leq ct_n$ met $c = L + 1$. Bijgevolg: als $\sum t_n$ convergeert, dan convergeert ook $\sum a_n$.

Als $L \neq 0$ is dan is op den duur $|a_n| > 0$. Bovendien is dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{|a_n|} = \frac{1}{L}.$$

Wanneer nu $\sum |a_n|$ convergeert, dan convergeert ook $\sum t_n$. Wanneer dus $\sum t_n$ divergeert, dan moet ook $\sum |a_n|$ divergeren. ■

♢ **Voorbeelden**

1. Beschouw de reeks $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^2 - n^2}$ voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Uit

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{z^2 - n^2} \right| n^2 = 1,$$

   Gevolg 1.19 en de convergentie van $\sum n^{-2}$ volgt dat de gegeven reeks convergent is.

2. De reeks $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ convergeert, omdat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) n^2 = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

   terwijl $\sum n^{-2}$ convergeert.

3. De reeks $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}$ divergeert, omdat $\sin\frac{1}{n} > 0$, dus $\sin\frac{1}{n} = \left|\sin\frac{1}{n}\right|$, voor elke $n \geq 1$ en omdat

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

   terwijl we al weten dat $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$ divergeert.

4. De voorwaarde $L \neq 0$ in de tweede bewering in Gevolg 1.19 is essentieel. Zo is bijvoorbeeld $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2}}{n^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$ divergeert en de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ convergeert.

♢

♡ **Opmerking.** In het vervolg zal het handig zijn om over de volgende notatie te beschikken. Laat $\{a_n\}_{n\geq 0}$ een complexe rij en $\{t_n\}_{n\geq 0}$ een rij reële getallen zijn. Veronderstel dat $t_n \geq 0$ voor alle n. Met

$$a_n = \mathcal{O}(t_n) \quad (n \to \infty)$$

(spreek uit: a_n is grote 'oh' van t_n) bedoelen we dan dat er een $L < \infty$ bestaat zodat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = L.$$

Gevolg 1.19 laat zich nu herformuleren als:

Als $\sum t_n$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen is dan volgt uit $a_n = \mathcal{O}(t_n)$ dat ook de reeks $\sum a_n$ convergeert.

Deze herformulering kunnen we gebruiken in combinatie met de *formule van Taylor*. Veronderstel dat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R(x),$$

waarin $R(x) = \mathcal{O}\left(x^k\right)$, dwz.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|R(x)|}{|x|^k} = L < \infty.$$

Neem nu aan dat

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Als $f^{(n)}(0) = 0$ voor $n \leq k-1$ dan $f(x) = \mathcal{O}\left(x^k\right)$ waaruit volgt dat

$$a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Neem

$$t_n = \frac{1}{n^k}.$$

Als $\sum t_n$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum a_n$ absoluut. ♡

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** We kunnen de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

gemakkelijk vaststellen. Inderdaad,

$$f(x) = 1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}\left(x^4\right)\right) = \frac{x^2}{2}+\mathcal{O}\left(x^4\right) = \mathcal{O}\left(x^2\right)$$

(hier is $k=2, L=\frac{1}{2}$). Dus geldt

$$1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Zij

$$a_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad t_n = \frac{1}{n^2}.$$

Omdat de reeks $\sum t_n$ convergeert, is de reeks $\sum a_n$ ook (absoluut) convergent. $\diamondsuit$

We besluiten deze paragraaf met twee convergentiecriteria die berusten op majorantie met een meetkundige reeks.

Stelling 1.20 (Wortelcriterium). *Veronderstel dat voor de reeks* $\sum a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < \infty.$$

Als $L<1$, *dan is* $\sum a_n$ *absoluut convergent.*
Als $L>1$, *dan is* $\sum a_n$ *divergent.*

Bewijs: Stel eerst $L<1$ en kies een getal R met $L<R<1$; bijvoorbeeld $R=\frac{1}{2}(1+L)$. Hierbij bestaat een natuurlijk getal N zo dat voor $n>N$ geldt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < R.$$

Dus is op den duur $|a_n|<R^n$. We weten al dat de meetkundige reeks $\sum R^n$ convergeert (immers $0<R<1$) en met behulp van het majorantiecriterium (Stelling 1.18) concluderen we nu dat $\sum a_n$ absoluut convergeert.

Als $L>1$, dan is op den duur $|a_n|>1$. De termen van de reeks gaan nu niet naar 0: de reeks $\sum a_n$ divergeert. ■

Stelling 1.21 (Quotiëntcriterium). *Veronderstel dat voor de reeks* $\sum a_n$ *de termen op den duur* $\neq 0$ *zijn en dat*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < \infty.$$

Als $L < 1$, *dan is* $\sum a_n$ *absoluut convergent.*
Als $L > 1$, *dan is* $\sum a_n$ *divergent.*

Bewijs: Stel eerst $L < 1$ en kies een getal R met $L < R < 1$; bijvoorbeeld $R = \frac{1}{2}(1 + L)$. Er is dan een N zo dat voor alle $n \geq N$ geldt: $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| < R$. Dan is dus voor $n > N$:

$$|a_n| < R|a_{n-1}| < R^2|a_{n-2}| < \ldots < R^{n-N}|a_N| = \left(\frac{|a_N|}{R^N} \right) R^n\,.$$

De meetkundige reeks $\sum R^n$ convergeert omdat $0 < R < 1$ is. Met behulp van het majorantiecriterium concluderen we dat de reeks $\sum a_n$ absoluut convergeert.

Als $L > 1$ dan is er een N zodat $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ voor $n \geq N$. Dus $|a_n| > |a_N|$ voor $n > N$. De termen gaan niet naar nul. De reeks divergeert. ∎

♢ **Voorbeeld.** Beschouw de reeks

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{2^n}.$$

Hier

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{2} < 1.$$

De reeks convergeert. ♢

♡ **Opmerking.** Men kan bewijzen: als $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ bestaat, dan bestaat ook $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ terwijl de limieten aan elkaar gelijk zijn; men zou dus kunnen volstaan met het berekenen van $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. In de praktijk blijkt het echter handig te zijn de Stellingen 1.20 en 1.21 naast elkaar te gebruiken. ♡

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Als illustratie beschouwen we de reeks

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Hier is $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}|z|$, terwijl $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1}|z|$. Via de laatste gelijkheid valt dus het gemakkelijkst in te zien dat de genoemde reeks convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$. $\diamondsuit$

$\heartsuit$ **Opmerkingen**

1. Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, dan helpt het bovenstaande criterium ons niet: de harmonische reeks $\sum \frac{1}{n}$ divergeert, de reeks $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeert.

2. We beschouwen de reeks $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $(z \in \mathbb{C})$. Schrijven we $a_n = \frac{z^n}{n^2}$ dan is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z|$$

en we zien dat de gegeven reeks absoluut convergeert voor $|z| < 1$, en divergeert voor $|z| > 1$. Voor $|z| = 1$ geeft het quotiënt criterium *geen uitsluitsel* ! In het onderhavige geval geldt voor $|z| = 1$ dat $|a_n| = n^{-2}$ zodat we met behulp van het majorantiecriterium toch kunnen beslissen dat de reeks convergeert. $\heartsuit$

1.5 Het integraalkenmerk

We beschouwen een functie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ die continu en monotoon dalend is en alleen positieve waarden aanneemt. We gaan convergentiekwesties voor de reeks $\sum_{n\geq 1} f(n)$ en voor de integraal $\int_1^{n+1} f(x)dx$ met elkaar vergelijken.

Omdat f monotoon dalend is geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$:

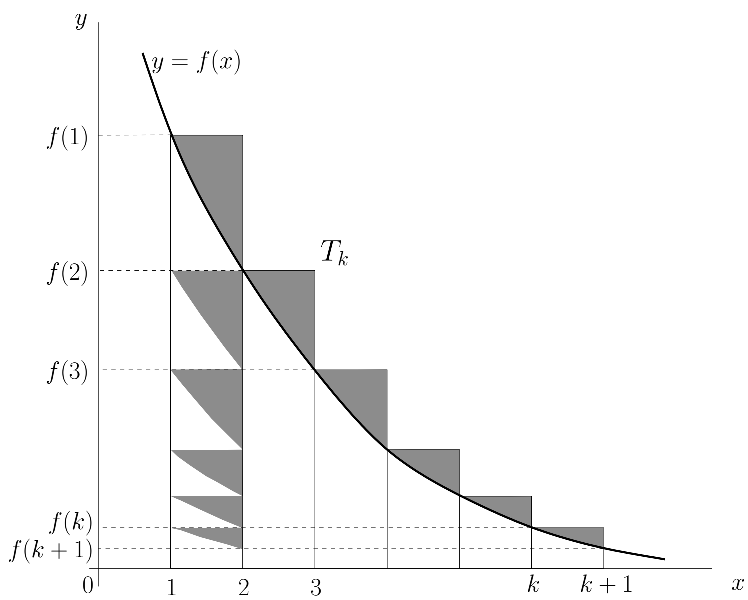
$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \qquad \text{als} \quad n \leq x \leq n+1.$$

Hieruit volgt

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1);$$

dus

$$f(n) - f(n+1) \geq f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx \geq 0.$$



Dit laat zien dat, wanneer we definiëren

$$T_k := \sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^{k+1} f(x)dx,$$

dan is de rij $\{T_k\}_{k\geq 1}$ monotoon stijgend en van boven begrensd door $f(1)$. Volgens Stelling 1.12 is deze rij dus convergent. Aldus is bewezen:

Lemma 1.22 *Als $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ een continue, monotoon dalende, positieve functie is, dan bestaat de limiet*

$$T^* = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^{k+1} f(x)dx \right].$$

Een direkt gevolg van dit lemma is:

Stelling 1.23 (Integraalkenmerk). *Laat $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ een positieve, continue en monotoon dalende functie zijn. Dan convergeert de reeks*

$$\sum_{n\geq 1} f(n)$$

dan en slechts dan als

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f(x)dx$$

bestaat (als reëel getal). ■

♢ **Voorbeeld.** De reeks

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

convergeert als $s > 1$ en divergeert als $s \leq 1$. Dit kunnen we als volgt inzien: De rij

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\left[(n+1)^{1-s}-1\right] & \text{als} \quad s\neq 1 \\ \ln(n+1) & \text{als} \quad s=1 \end{cases}$$

convergeert voor reële $s > 1$ en divergeert voor $s \leq 1$ als $n \to \infty$. Voor $s \geq 0$ is x^{-s} een monotoon dalende functie. Met behulp van het integraalkenmerk concluderen we dat de reeks $\sum n^{-s}$ convergeert als $s > 1$ en divergeert als $0 \leq s \leq 1$. Uiteraard divergeert de reeks $\sum n^{-s}$ ook voor $s < 0$, gewoon omdat de termen niet naar nul gaan (er geldt dan zelfs $\lim_{n\to\infty} n^{-s} = \infty$). Het integraalkenmerk is voor $s < 0$ niet bruikbaar omdat dan de functie x^{-s} niet monotoon dalend is. ♢

Voor $s = 1$ staat hierboven de harmonische reeks

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

en we wisten al dat die divergeert, maar nu zien we bovendien met welke snelheid de reeks divergeert; immers uit Lemma 1.22 volgt dat

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right)$$

bestaat. Omdat $\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln n) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, bestaat dus ook

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Men noemt dit getal

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0,57721566490... \tag{9}$$

de *constante van Euler.*

In het voorbeeld na Stelling 1.15 zagen we dat de alternerende reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ wel convergent is. Met behulp van het bovenstaande kunnen we nu zijn som *berekenen.* Die is immers de limiet van

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2k}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2k}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2k} - \ln 2k\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} - \ln k\right) + \ln 2.
\end{aligned}$$

De laatste uitdrukking heeft voor $k \to \infty$ als limiet $\gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$.
We zien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Voor $R > 2$ is

$$\int_2^R \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}[(\ln R)^{1-s} - (\ln 2)^{1-s}] & \text{als} \quad s \neq 1 \\ \ln \ln R - \ln \ln 2 & \text{als} \quad s = 1 \end{cases}$$

We zien dat de rij
$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^s}$$
convergeert voor $s > 1$ en divergeert voor $s \leq 1$. De afgeleide van de integrand is $-\frac{s+\ln x}{x^2(\ln x)^{s+1}}$. Hieraan zien we dat de integrand op het interval $\{x \in \mathbb{R} | x > \max(1, e^{-s})\}$ een monotoon dalende functie is. Toepassing van het integraalkenmerk leert ons derhalve dat de reeks

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^s}$$

convergeert voor $s > 1$ en divergeert voor $s \leq 1$. $\diamondsuit$

1.6 Opgaven

1. Bereken $\sqrt{i}$, dwz. vind alle complexe getallen z waarvoor $z^2 = i$. Schrijf de antwoorden in de vorm $re^{i\varphi}$ en in de vorm $x + iy$.

2. Bereken de limieten als $n \to \infty$ van de volgende rijen:

   (a) $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

   (b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

3. Bereken de limiet als $n \to \infty$ van de rij

$$a_n = \frac{e^{in}}{2^n}.$$

4. Ga na of de volgende reeksen convergent zijn:

   (a) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$;

   (b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$;

   (c) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$;

   (d) $\sum_{n\geq 1} \cos \frac{1}{n^2}$;

   (e) $\sum_{n\geq 1} (1 - \cos \frac{1}{n})$;

   (f) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}$.

5. Ga na of de volgende reeksen convergent of divergent zijn:

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})}$

   (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

   (c) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}$

   (d) $\sum_{n\geq 1} (\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})$

   (e) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{n}{n^2+1}$

6. Idem voor de reeksen:

   (a) $\sum_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$

   (b) $\sum_{n\geq 1} (e^{n^{-2}} - 1)$

(c) $\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$

(d) $\sum_{n\geq 1} n^n 2^{-\sqrt{n}}$

(e) $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$

(f) $\sum_{n\geq 1} 2^{-n+\ln n}$

7. Idem voor de reeksen:

   (a) $\sum_{n\geq 1} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

   (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^3}{(\ln 3)^n}$

   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$

   (e) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{e^n n!}$

   (f) $\sum_{n\geq 1} n^{-n\sin\frac{\pi}{3n}}$

8. Bepaal de som van de reeks
$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

9. Waar liggen in het complexe vlak alle getallen z waarvoor
$$\sum e^{n(z^2+1)}$$
convergeert?

10. Voor welke reële x zijn de volgende reeksen convergent?

    (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{x^2+n^2}$;

    (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(x^n)}{n^2+1}$;

    (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{2+\sin nx}{n^2+1}$.

11. (a) Toon aan dat:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Aanwijzing: Zoek een verband tussen de partiële sommen van beide reeksen.

(b) Toon aan dat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

12. Voor welke reële a zijn de volgende reeksen convergent?

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$;

   (b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a \ln n}$.

13. Ga voor de volgende reeksen na of ze convergent of divergent zijn. Motiveer uw antwoorden.

   (a) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$

   (b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$

   (c) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$.

14. Bepaal voor alle reële getallen x of de reeks

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^x}{1+n^{2x}}$$

convergent of divergent is. Hint: onderscheid de gevallen $x = 0$, $x < 0$ en $x > 0$ en vergelijk met een bekende reeks.

15. Definieer de reeks $\sum_{n\geq 1} a_n$ door:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{4m-3} & \text{als} \quad n = 3m-2 \\ \frac{1}{4m-1} & \text{als} \quad n = 3m-1 \\ -\frac{1}{2m} & \text{als} \quad n = 3m \end{cases}$$

Dus

$$\sum_{n\geq 1} a_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots .$$

Bereken $\sum_{n\geq 1} a_n$ en vergelijk het resultaat met

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2.$$

2 Fourierreeksen en periodieke functies

In dit hoofdstuk bekijken we het verband tussen periodieke functies en Fourierreeksen. Daarbij kan de theorie het meest elegant en efficiënt worden gepresenteerd als we systematisch gebruik maken van functies van een reële variabele die complexe getallen als functiewaarden aannemen. Om die reden hebben we in paragraaf 2.1 een aantal zaken over dergelijke functies bij elkaar gezet.

2.1 Functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

We bespreken kort de theorie van het differentiëren en integreren van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Door de functiewaarden te splitsen in reëel en imaginair deel splitst ook de functie f in een reëel deel $\mathrm{Re}\, f$ en een imaginair deel $\mathrm{Im}\, f$:

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,, \qquad \mathrm{Re}\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \mathrm{Im}\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\\
&(\mathrm{Re}\, f)(t) := \mathrm{Re}\,(f(t))\,, \quad (\mathrm{Im}\, f)(t) := \mathrm{Im}\,(f(t)) \quad \text{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}\,,\\
&f = \mathrm{Re}\, f \;+\; i\mathrm{Im}\, f\,, \quad f(t) = \mathrm{Re}\, f(t) \;+\; i\mathrm{Im}\, f(t).
\end{aligned}$$

Definitie 2.1 De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heet *continu* als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ beide continue reëelwaardige functies zijn.

Deze definitie is in overeensteming met de wat abstractere definitie: De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heet *continu* in $t \in \mathbb{R}$ als er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodat voor alle h met $|h| < \delta$ geldt

$$|f(t+h) - f(t)| < \epsilon.$$

Inderdaad, geldt voor ieder tweetal complexe getallen $z = x+iy$ en $w = u+iv$, met $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ dat

$$|x-u| \leq |z-w|\,, \quad |y-v| \leq |z-w| \quad \text{en} \quad |z-w| \leq |x-u| + |y-v|.$$

Dus

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |\mathrm{Re}\, f(t+h) - \mathrm{Re}\, f(t)| + |\mathrm{Im}\, f(t+h) - \mathrm{Im}\, f(t)|$$

en

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\, f(t+h) - \mathrm{Re}\, f(t)| &\leq |f(t+h) - f(t)|, \\ |\mathrm{Im}\, f(t+h) - \mathrm{Im}\, f(t)| &\leq |f(t+h) - f(t)|. \end{aligned}$$

Dus is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu volgens de abstracte definitie dan en slechts dan als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ beide continue functies zijn.

Definitie 2.2 Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heet *differentieerbaar* als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ beide differentieerbare reëelwaardige functies zijn. In dat geval definiëren we

$$f'(t) := (\mathrm{Re}\, f)'(t) + i\, (\mathrm{Im}\, f)'(t)$$

en noemen dit de *afgeleide van f in* $t \in \mathbb{R}$.

Als functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differentieerbaar is in het punt $t \in \mathbb{R}$ dan bestaat de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

en is die gelijk aan $f'(t)$. *Opgave:* Ga dat na.

♢ **Voorbeeld.** Voor een complex getal $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$) definiëren we de functie $e^{\lambda t} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$e^{\lambda t} := e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i\, e^{\alpha t} \sin(\beta t) \qquad \text{voor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

De functie $e^{\lambda t}$ is differentieerbaar omdat de functies $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ en $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ differentieerbaar zijn, en er geldt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} &= [\alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t)] + i\, [\alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t)] \\ &= (\alpha + i\beta)(e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i\, e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

kortom

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

♢

Alle gebruikelijke rekenregels voor het differentiëren gelden ook voor functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$; we noemen met name de *produktregel*

$$(f\, g)'(t) = f'(t)\, g(t) + f(t)\, g'(t);$$

het is een goede oefening om deze produktregel voor complex-waardige functies af te leiden uit de produktregel voor reëel-waardige functies en de vermenigvuldigregels voor complexe getallen.

Definitie 2.3 Voor een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en voor $a, b \in \mathbb{R}$, definiëren we

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b (\mathrm{Re}\, f)(t)dt + i \int_a^b (\mathrm{Im}\, f)(t)dt.$$

Volgens de bekende theorie voor het differentiëren en integreren van reëel-waardige functies, is voor een continue functie $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b k(t)dt = K(b) - K(a)$$

waarbij $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie is met afgeleide $K' = k$. Door dit toe te passen op de functies $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ ziet men dat ook voor een complex-waardige continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ geldt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

met een differentieerbare functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zo dat $F'(t) = f(t)$.

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Als $\lambda \neq 0$ is, dan is $\displaystyle\int_a^b e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda b} - e^{\lambda a})$. $\diamondsuit$

Uit het voorgaande volgt dat de gebruikelijke formules voor partiëel integreren ook gelden voor functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; er geldt namelijk:
Als $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continu-differentieerbare functie is zo dat $G' = g$ en als f continu-differentieerbaar is, dan is:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(t)G(t)dt;$$

inderdaad

$$f(b)G(b) - f(a)G(a) = \int_a^b (f\,G)'(t)dt = \int_a^b (f'(t)G(t) + f(t)G'(t))dt$$

Tenslotte, vermelden we dat de gebruikelijke schatting voor $a \leq b$

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

ook geldt voor een continue complex-waardige functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2.2 Periodieke functies uit Fourierreeksen

Fourierreeksen zijn reeksen van de vorm

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}. \tag{10}$$

Daarbij is x een reële variabele en is $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ een rij complexe getallen.

Een aantal voorbeelden zijn bij elkaar gezet in paragraaf 2.4. *Het is verstandig om bij het bestuderen van de theorie deze paragraaf met voorbeelden regelmatig te raadplegen.*

Voor vaste $x \in \mathbb{R}$ is $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ een reeks van complexe getallen. Wanneer deze reeks convergeert in de zin van Definitie 1.5 heeft deze reeks een som

$$C(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Dit is een complex getal, dat in het algemeen afhangt van x.

De kwestie voor welke reële getallen x de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ convergeert is in het algemeen heel subtiel. Als echter gegeven is dat de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ convergeert (in de zin van Definitie 1.5) dan convergeert de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$; immers

$$|c_n e^{inx}| = |c_n| \qquad (\text{want } \ |e^{inx}| = 1\ )$$

en absolute convergentie impliceert convergentie (zie Stelling 1.15).

Stelling 2.4 *Zij $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ een rij complexe getallen, zo dat de reeks $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ absoluut convergeert. Dan is de reeks $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ (absoluut)* *convergent. We krijgen een functie $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door te definiëren*

$$C(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \textit{voor } \; x \in \mathbb{R}.$$

Deze functie C is continu en periodiek met periode 2π dwz.:

$$C(x + 2\pi) = C(x) \qquad \textit{voor alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bewijs: (voor de liefhebber). Voor alle $n \in \mathbb{Z}$ en $x \in \mathbb{R}$ geldt $|c_n e^{inx}| = |c_n|$. De veronderstelde absolute convergentie van $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ impliceert dus de (absolute) convergentie van $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$. Daarmee is de functie $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dus gedefinieerd. Om de continuïteit van de functie C te bewijzen moeten we laten zien:

$$\begin{array}{l} \text{voor elke } \; x \in \mathbb{R} \; \text{ en elke } \; \epsilon > 0 \; \text{ is er een } \; \delta > 0 \; \text{ zodat} \\ \text{als } \; |h| < \delta \; \text{ dan } \; |C(x+h) - C(x)| < \epsilon. \end{array}$$

Laat dus $x \in \mathbb{R}$ en $\epsilon > 0$ gegeven zijn. Vanwege de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ is er een geheel getal $N > 0$ zodat

$$\sum_{n>N} |c_n| < \frac{\epsilon}{5} \qquad \text{en} \qquad \sum_{n<-N} |c_n| < \frac{\epsilon}{5}$$

Dan is voor elke h:

$$\begin{aligned} |C(x+h) - C(x)| \;\; &\le \;\; \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}(e^{inh} - 1) \right| + \left| \sum_{n>N} c_n e^{in(x+h)} \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{n<-N} c_n e^{in(x+h)} \right| + \left| \sum_{n>N} c_n e^{inx} \right| + \left| \sum_{n<-N} c_n e^{inx} \right| \\ &\le \;\; \left| \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}(e^{inh} - 1) \right| + \frac{4}{5}\epsilon. \end{aligned}$$

Bij $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}(e^{inh} - 1)$ gaat het om een eindige som van continue functies en in het bijzonder is

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}(e^{inh} - 1) = 0.$$

Bij g is er een $\delta > 0$ zodat voor elke h met $|h| < \delta$ geldt

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}(e^{inh} - 1)\right| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Alles bij elkaar blijkt dat voor elke h met $|h| < \delta$ geldt $|C(x+h) - C(x)| < \epsilon$. Hiermee is de continuïteit van de functie C bewezen.

De 2π-periodiciteit van de functie C volgt uit

$$e^{in(x+2\pi)} = e^{inx} \cdot e^{2\pi in} = e^{inx} \qquad \text{voor alle} \quad n \in \mathbb{Z}\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

■

♢ Voorbeelden

1. Een Fourierreeks hoeft niet per se oneindig veel termen (ongelijk nul) te hebben. Hier zijn drie volkomen legitieme voorbeelden:

$$\begin{aligned} e^{i0x} &= 1 \\ \tfrac{1}{2}e^{-ix} + \tfrac{1}{2}e^{ix} &= \cos x \\ \tfrac{-1}{2i}e^{-ix} + \tfrac{1}{2i}e^{ix} &= \sin x\,. \end{aligned}$$

2. De Fourierreeks

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)ix}}{(2k+1)^2}$$

definieert een 2π-periodieke functie. In Paragraaf 2.4 zullen we zien dat voor $-\pi \le x \le \pi$ de functiewaarde gelijk is aan $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}|x|$.

Zonder bewijs vermelden we hier een stelling, die zegt dat, onder geschikte voorwaarden, een Fourierreeks een differentieerbare functie geeft en dat de afgeleide kan worden berekend door in de Fourierreeks elke term te differentiëren naar x.

Stelling 2.5 *Zij* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *een rij complexe getallen, zo dat de reeks* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} nc_n$ *absoluut convergeert. Dan convergeren de reeksen* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *en* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} nc_n e^{inx}$ *voor elke* $x \in \mathbb{R}$*. De functie* $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, gegeven door*

$$C(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \text{voor } \ x \in \mathbb{R},$$

is dan differentieerbaar en z'n afgeleide C' *wordt gegeven door*

$$C'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\, c_n e^{inx} \qquad \text{voor } \ x \in \mathbb{R}.$$

De volgende stelling geeft een handige formule (11) waarmee de *Fouriercoëfficiënten* kunnen worden teruggevonden uit de 2π-periodieke functie. Zo'n formule noemt men een *Fourierinversie formule*.

Stelling 2.6 *Zij* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *een rij complexe getallen, zo dat de reeks* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ *absoluut convergeert. Zij* $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de functie gegeven door*

$$C(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \text{voor } \ x \in \mathbb{R}.$$

Dan is voor elke $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C(x) e^{-ikx} dx = c_k \ . \tag{11}$$

Bewijsschets: De onderstaande berekening geeft een indicatie dat de formule (11) klopt.

$$\frac{1}{2\pi} C(x) e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)x} \ .$$

Als we de reeks termsgewijs kunnen integreren, dan moet gelden

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx \ . \tag{12}$$

Merk nu op dat voor $n \neq k$ geldt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx = \frac{1}{2\pi i(n-k)}[e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}] = 0 \tag{13}$$

en dat voor $n = k$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1. \tag{14}$$

Dus blijft in het rechter deel van (12) slechts één term: c_k.

Bewijs: (voor de liefhebber). Laat $k \in \mathbb{Z}$ gegeven zijn. We bewijzen dat voor ieder positief reëel getal ϵ geldt

$$\left| c_k - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C(x)e^{-ikx}dx \right| < \epsilon.$$

Door vervolgens de limiet te nemen voor $\epsilon \downarrow 0$ vinden we formule (11).

Neem $\epsilon > 0$. Dan kunnen we, vanwege de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$, een $N > |k|$ nemen zodat

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{en} \qquad \sum_{n=-\infty}^{-N-1} |c_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is dan $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{i(n-k)x}\right| < \frac{\epsilon}{2}$ en $\left|\sum_{n=-\infty}^{-N-1} c_n e^{i(n-k)x}\right| < \frac{\epsilon}{2}$
en dus

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)x} - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i(n-k)x} \right| < \epsilon.$$

Daaruit volgt

$$\left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C(x)e^{-ikx}dx \; - \; \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx \right| \;\leq \tag{15}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)x} - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i(n-k)x} \right| dx \;<\; \epsilon.$$

Nu maken we gebruik van (13) en (14). Uit de formule (15) blijkt dan

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C(x) e^{-ikx} dx \; - \; c_k \right| < \epsilon \,,$$

zoals gewenst. ■

Stelling 2.7 *Zij $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ een rij complexe getallen, zo dat de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ absoluut convergeert. Zij $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de functie gegeven door*

$$C(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad \textit{voor} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Dan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{16}$$

Bewijsschets: De onderstaande rekenpartij geeft slechts een indicatie van het bewijs. Voor een wiskundig volledig verantwoord bewijs zou men elke oneindige som $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ moeten benaderen met een eindige som $\sum_{n=-N}^{N}$ en zou men zorgvuldig moeten nagaan hoe groot de "fout" is in die benadering.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C(x)\, e^{-inx}\, dx} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{C(x)}\, e^{inx}\, dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{C(x)} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{C(x)}\, C(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |C(x)|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

■

2.3 Fourierreeksen bij 2π-periodieke functies

Definitie 2.8 Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een functie. Dan

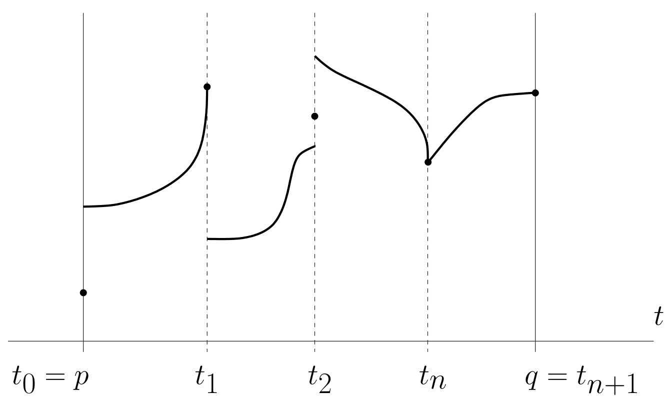
$$g(x^+) := \lim_{t \downarrow x} g(t) \quad \text{en} \quad g(x^-) := \lim_{t \uparrow x} g(t).$$

Definitie 2.9 *Men zegt dat een functie $f : [p,q] \to \mathbb{R}$, die is gedefinieerd op een gesloten interval $[p,q]$,* stuksgewijs continu *(engels:* piecewise continuous*) is, als er in het interval eindig veel punten $t_1, \ldots, t_n$ zijn zo dat*

$$p < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n < q$$

en zo dat is voldaan aan de volgende voorwaarden

- *f is een continue functie op de open intervallen $(p, t_1), (t_n, q)$ en (t_{j-1}, t_j) voor $j = 2, \ldots, n$;*
- *de limieten $f(p^+), f(q^-)$ en $f(t_j^{\pm})$ voor $j = 1, 2, \ldots, n$ bestaan (als reële getallen).*



♡ **Opmerking.** We eisen *niet* dat $f(t_j^+) = f(t_j)$ of $f(t_j^-) = f(t_j)$ of $f(t_j^+) = f(t_j^-)$. In het punt t_j mag f sprongen maken; de bovenstaande figuur laat zien wat daarbij zoal mogelijk is. Men noemt deze punten $t_1, \ldots, t_n$ de *uitzonderingspunten* of *discontinuïteitspunten*. Overigens hoeft f in zo'n discontinuïteitspunt niet per se een sprong te maken, f mag er ook continu verlopen. Als we spreken over "de discontinuïteitspunten $t_1, \ldots, t_n$ van de functie f " dan geven we daarmee dus niet zo zeer aan dat f in die punten niet continu is, als wel dat f overal elders wel continu is.

Een stuksgewijs continue functie f op een gesloten interval $[p, q]$ mag slechts *eindig veel* uitzonderingspunten hebben. ♡

Definitie 2.10 *Men zegt dat een functie* $f : [p, q] \to \mathbb{C}$ *op een gesloten interval* $[p, q] \subset \mathbb{R}$ stuksgewijs continu *is als beide functies* $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f : [p, q] \to \mathbb{R}$ *stuksgewijs continu zijn.*

Zij nu f een stuksgewijs continue functie als in Definitie 2.10. Voor de eenvoud in de formulering schrijven we $t_0 = p$ en $t_{n+1} = q$. Voor $j = 0, 1, \ldots, n$ definiëren we een functie f_j op het gesloten interval $[t_j, t_{j+1}]$ door

$$\begin{aligned} f_j(t) &= f(t) \qquad \text{voor} \quad t_j < t < t_{j+1} \\ f_j(t_j) &= f(t_j^+) \\ f_j(t_{j+1}) &= f(t_{j+1}^-) \end{aligned}$$

Dan is f_j een continue functie op het gesloten interval $[t_j, t_{j+1}]$ en de integraal $\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t)dt$ (die we volgens de Definitie 2.3 berekenen) bestaat.

We definiëren nu

$$\int_p^q f(t)dt := \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_j(t)dt. \tag{17}$$

Echter, bij nader inzien blijken de waarden van f in zijn discontinuïteitspunten totaal geen invloed te hebben op de waarde van de integraal (17).

Definitie 2.11 *Men zegt dat een functie* $f : [p, q] \to \mathbb{R}$*, die is gedefinieerd op een gesloten interval* $[p, q]$, stuksgewijs continu-differentieerbaar *(engels:* piecewise continuously-differentiable*) is, als er in het interval eindig veel punten* $t_1, \ldots, t_n$ *zijn zo dat*

$$p < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n < q$$

en zo dat is voldaan aan de volgende voorwaarden

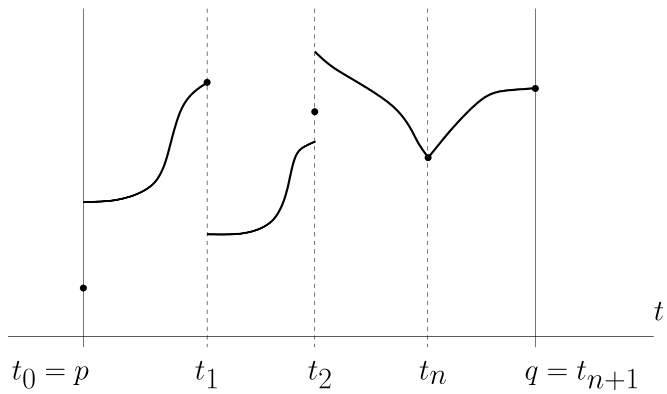
- *op de open intervallen* $(p, t_1), (t_n, q)$ *en* (t_{i-1}, t_i) *voor* $i = 2, \ldots, n$ *is* f *een differentieerbare functie en is de afgeleide functie* f' *continu*

- *de limieten* $f(p^+), f'(p^+), f(q^-), f'(q^-)$ *en*

$$f(t_i^\pm), f'(t_i^\pm), \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n$$

bestaan (als reëele getallen).

De punten $t_1, \ldots, t_n$ *zullen we steeds de* uitzonderingspunten *noemen.*



Merk op dat iedere stuksgewijs continu-differentieerbare functie f is stuksgewijs continu.

Als f een stuksgewijs continu-differentieerbare functie is, dan is volgens de voorgaande definitie de waarde van $f'(t)$ wel gedefinieerd voor elk punt t in een van de open intervallen $(p, t_1), (t_n, q)$ of (t_{i-1}, t_i) voor $i = 2, \ldots, n$ – er staat immers als voorwaarde dat de afgeleide functie f' bestaat op elk van die open intervallen – maar er wordt geen enkele poging gedaan om de waarden van de afgeleide functie f' in p, q of in de uitzonderingspunten $t_1, t_2 \ldots$ te definiëren.

Op dezelfde manier kan men stuksgewijs r-keer continu-differentieerbare functies definiëren.

Definitie 2.12 *Men zegt dat een functie* $f : [p, q] \to \mathbb{C}$ *op een gesloten interval* $[p, q] \subset \mathbb{R}$ stuksgewijs (r-keer) continu differentieerbaar *is als beide functies* $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f : [p, q] \to \mathbb{R}$ *stuksgewijs (r-keer) continu differentieerbaar zijn.*

Definitie 2.13 *Een* periodieke functie met periode 2π *– of korter gezegd* een 2π-periodieke functie *– is een functie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *die voldoet aan*

$$f(t + 2\pi) = f(t) \qquad \textit{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Definitie 2.14 *Voor een stuksgewijs continue 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiëren we de rij van zijn* Fouriercoëfficiënten $\{\widehat{f}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *door:*

$$\widehat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{19}$$

Met deze rij van Fouriercoëfficiënten kunnen we vervolgens de Fourierreeks

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$$

vormen. Deze reeks noemen we de Fourierreeks van f*.*

Natuurlijke vragen zijn nu:

a. *Convergeert de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$?*

b. *Zo ja, is dan $f(x)$ gelijk aan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$?*

De hierna volgende Stellingen 2.16 en 2.17 geven een genuanceerd antwoord op deze vragen. Als de eerste stap naartoe, geven we het volgende lemma.

Lemma 2.15 (Riemann-Lebesgue) *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue 2π-periodieke functie. Dan is*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}_n = 0.$$

Bewijs: (voor de liefhebber). Het is voldoende het lemma alleen voor reëel-waardige functies te bewijzen. Inderdaad, geldt voor iedere stuksgewijs continue en 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{Re}\ f)(t)e^{-int}dt + i\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{Im}\ f)(t)e^{-int}dt\ ,$$

waarin $(\mathrm{Re}\ f)$ en $(\mathrm{Im}\ f)$ reëel-waardige stuksgewijs-continue en 2π-periodieke functies zijn. In de rest van het bewijs zullen we dus annemen dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

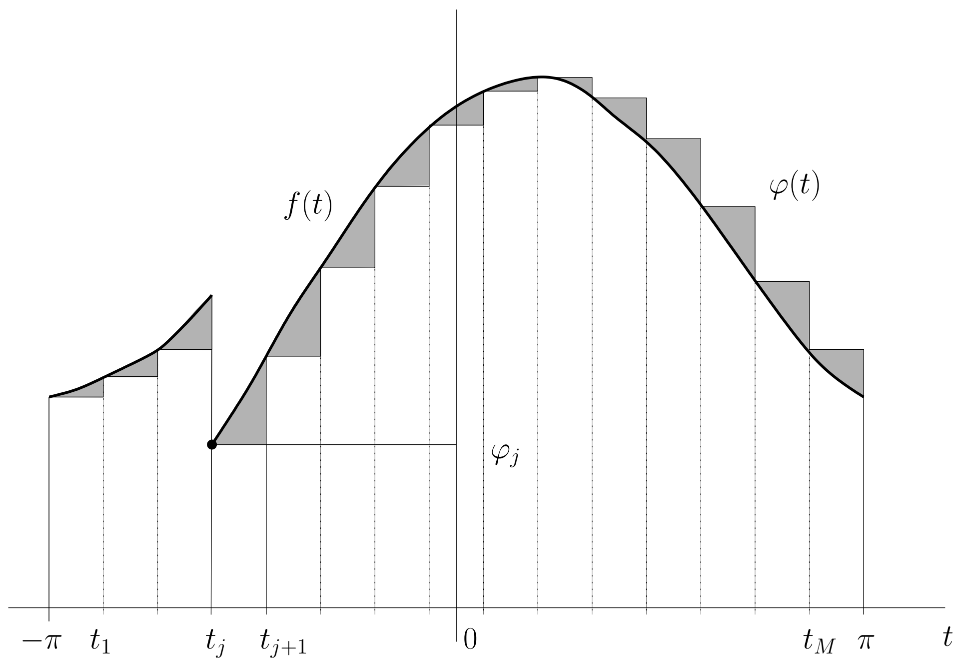
Neem $\epsilon > 0$ en defineër een *stuksgewijs constante* functie $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ zo dat

$$\varphi(t) = f(t_j^+) \qquad \text{voor} \quad t \in [t_j, t_{j+1})$$

en $\varphi(t_{M+1}) = \varphi(t_0)$. Hierin zijn $-\pi = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_M, t_{M+1} = \pi$ de discontinuïteitspunten van φ. Als M voldoende groot is en alle $|t_{j+1} - t_j|$ klein genoeg zijn, dan

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \varphi(t)| dt < \frac{\epsilon}{2}$$

(zie figuur).



Dan is

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (f(t) - \varphi(t)) dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t) dt \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \varphi(t)| dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t) dt \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t) dt \right|. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Definiëer verder

$$\omega_j = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \qquad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, M.$$

Dan is voor $n > 0$:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist} \varphi(t) dt \right| = \left| \frac{1}{-in} \left[\varphi(\pi) e^{-i\pi n} - \sum_{j=1}^{M} \omega_j e^{-int_j} - \varphi(-\pi) e^{i\pi n} \right] \right| \leq \frac{C}{n}$$

met

$$C = \sum_{j=1}^{M} |\omega_j| \ .$$

We zien dat als we $n > \frac{2C}{\epsilon}$ nemen, dan is

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{21}$$

Door (20) en (21) te combineren zien we dat

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \right| < \epsilon \quad \text{voor alle} \ \ n > \frac{2C}{\epsilon}.$$

Omdat $\epsilon > 0$ willekeurig is, is hiermee bewezen $\lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n = 0$. Op precies dezelfde manier bewijst men $\lim_{n\to-\infty} \widehat{f}_n = 0$. □

♡ **Opmerking.** Het Riemann-Lebesgue Lemma impliceert dat voor een stuksgewijs continue 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \ dx = 0.$$

♡

Stelling 2.16 *Zij f een stuksgewijs continu differentieerbare 2π-periodieke functie. Dan bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de limiet*

$$\lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx} \right]$$

en geldt de ***Fourierinversie formule:***

$$\frac{1}{2}\left[f(x^-)\,+\,f(x^+)\right]\;=\;\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right]. \tag{22}$$

Als de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n e^{inx}$ convergeert en f continu is in het punt x, dan neemt formule (22) de volgende aantrekkelijke gedaante aan

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n e^{inx}. \tag{23}$$

♡ **Opmerking.** Het bestaan van de limiet $\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right]$ is *niet een voldoende reden* voor de convergentie van de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n e^{inx}$! Men mag dan ook niet zonder meer $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n e^{inx}$ schrijven in plaats van $\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right]$. Om toch een kompakte notatie te hebben voor deze limiet (als hij bestaat) schrijven sommige auteurs

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\;\widehat{f}_n e^{inx}:=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right] \tag{24}$$

en noemen dit dan de *hoofdwaarde van de Fourierreeks.*

Wanneer we (om andere redenen) weten dat de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n e^{inx}$ convergeert, dan is natuurlijk wel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n e^{inx}=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right].$$

♡

Bewijs: (voor de liefhebber) Laat $x\in\mathbb{R}$ gegeven zijn. Definieer daarbij een nieuwe 2π-periodieke functie φ:

$$\varphi(0):=0\,,\qquad \varphi(t):=f(t+x)-A-Bv(t)\quad\text{voor }-\pi<t\le\pi \tag{25}$$

met

$$A=\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right],\quad B=\frac{1}{2}\left[f(x^+)-f(x^-)\right]$$

en v de 2π-periodieke functie gedefinieerd door

$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -\pi < t < 0, \\ 1 & \text{als} \quad 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{als} \quad t = 0 \text{ of } \pi. \end{cases}$$

De Fouriercoëfficiënten van φ berekenen we met behulp van Voorbeelden 1 en 2 in Paragraaf 2.4:
voor $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, e^{-int}dt - \frac{B}{\pi i n}[1-(-1)^n] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)\, e^{-in(t-x)}dt - \frac{B}{\pi i n}[1-(-1)^n] \\ &= e^{inx}\widehat{f}_n - \frac{B}{\pi i n}[1-(-1)^n] \end{aligned}$$

en voor $n = 0$

$$\widehat{\varphi}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)dt - A = \widehat{f}_0 - A$$

Hieruit blijkt

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\varphi}_n &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx} - A - \sum_{n=-N}^{-1} \frac{B}{\pi i n}[1-(-1)^n] - \sum_{n=1}^{N} \frac{B}{\pi i n}[1-(-1)^n] \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx} - A. \end{aligned}$$

Zo zien we:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx}\right] \text{ bestaat} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{\varphi}_n\right] \text{ bestaat.}$$

Formule (22) blijkt equivalent te zijn met

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N} \widehat{\varphi}_n\right] = 0. \tag{26}$$

Om formule (26) te bewijzen nemen we de 2π-periodieke functie g, die wordt gedefinieerd door

$$g(0) = 0\,, \qquad g(t) = \frac{\varphi(t)}{1-e^{it}} \quad \text{voor} \quad -\pi < t \leq \pi.$$

De functie g kan alleen discontinu zijn in de discontinuïteitspunten van φ en bij de gehele veelvouden van 2π. Voor een discontinuïteitspunt t_j van φ, dat niet een geheel veelvoud is van 2π, bestaan

$$g(t_j^-) = \frac{1}{1-e^{it_j}}\varphi(t_j^-) \qquad \text{en} \qquad g(t_j^+) = \frac{1}{1-e^{it_j}}\varphi(t_j^+)$$

omdat φ een stuksgewijs continue functie is. Vanwege de 2π-periodiciteit ziet de situatie in de buurt van het eventuele discontinuïteitspunt $2k\pi$ hetzelfde uit als bij 0. Bij 0 is

$$\begin{aligned} g(0^-) &= \lim_{t\uparrow 0}\left[\frac{t}{1-e^{it}}\lim_{y\uparrow 0}\frac{f(t+x)-f(y+x)}{t-y}\right] = i\lim_{\xi\uparrow x} f'(\xi) = i\,f'(x^-) \\ g(0^+) &= \lim_{t\downarrow 0}\left[\frac{t}{1-e^{it}}\lim_{y\downarrow 0}\frac{f(t+x)-f(y+x)}{t-y}\right] = i\lim_{\xi\downarrow x} f'(\xi) = i\,f'(x^+), \end{aligned}$$

waarbij de limieten rechts bestaan vanwege de veronderstelling dat f een stuksgewijs continu differentieerbare functie is. Dus is g een stuksgewijs continue 2π-periodieke functie.

Uit de definitie van de functie g is duidelijk dat

$$\varphi(t) = (1-e^{it})\,g(t) \qquad \text{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dit impliceert voor de Fouriercoëfficiënten:

$$\widehat{\varphi}_n = \widehat{g}_n - \widehat{g}_{n-1} \qquad \text{voor alle} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zo blijkt

$$\sum_{n=-N}^{N}\widehat{\varphi}_n = \sum_{n=-N}^{N}[\widehat{g}_n - \widehat{g}_{n-1}] = \widehat{g}_N - \widehat{g}_{-N-1}.$$

Dus

$$\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx} - A = \widehat{g}_N - \widehat{g}_{-(N+1)}$$

en met Lemma 2.15 concluderen we dat

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{inx} - A = \lim_{N\to\infty} \widehat{g}_N - \lim_{N\to\infty} \widehat{g}_{-(N+1)} = 0 - 0 = 0$$

voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

Hiermee is het bewijs van de Fourierinversie formule (22) geleverd. ■

Stelling 2.17 *Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een tweemaal continu differentieerbare 2π-periodieke functie is, dan convergeert de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ en is*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx} \qquad \textit{voor elke} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bewijs: We gebruiken Stelling 2.16 en hoeven daarom alleen nog maar te bewijzen dat de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ convergeert.

Door tweemaal partieel integreren ziet men (merk op dat ook de afgeleide van een 2π-periodieke functie 2π-periodiek is):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt \\ &= \frac{-1}{2\pi i n} \left(\left[f(\pi) e^{-in\pi} - f(-\pi) e^{in\pi} \right] - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\ e^{-int}\ dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Uit (27) volgt

$$|\widehat{f}_n| \le \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt \right). \tag{28}$$

Hier staat tussen de haken een getal dat niet van n afhangt. De reeks $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$ convergeert. Volgens het Majorantie criterium (Stelling 1.18) zijn dan eveneens de reeksen $\sum_{n\le0} \widehat{f}_n$, $\sum_{n\ge1} \widehat{f}_n$, en daarom ook $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n$, absoluut convergent. We concluderen tenslotte dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ (absoluut) convergeert. ■

Laten we de Fourierinversie formule (22) nog eens nader bekijken.

Wanneer de functie f continu is in x, dan is het linkerlid gelijk aan $f(x)$. Als x een discontinuïteitspunt is van f hoeft dat niet zo te zijn. Echter, bij nader inzien blijken de waarden van f in zijn discontinuïteitspunten totaal geen invloed te hebben op de waarde van de integralen waarmee de Fouriercoëfficiënten van f zijn gedefinieerd. Het rechterlid van de Fourierinversie formule (22) verandert dus niet als we de waarden van f in zijn discontinuïteitspunten zo aanpassen dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ het linkerlid van de Fourierinversie formule (22) gelijk is aan $f(x)$.

Wat betreft het rechterlid van de Fourierinversie formule (22) is al opgemerkt, dat het bestaan van de limiet $\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right]$ niet een voldoende reden is voor de convergentie van de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n e^{inx}$. Echter,

$$\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx} = \widehat{f}_0 + \sum_{n=1}^{N}(\widehat{f}_{-n}e^{-inx} + \widehat{f}_n e^{inx}).$$

Dus is het bestaan van de limiet $\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right]$ equivalent met het gewoon convergeren van de reeks $\widehat{f}_0 + \sum_{n\geq 1}(\widehat{f}_{-n}e^{-inx} + \widehat{f}_n e^{inx})$ en is

$$\widehat{f}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\widehat{f}_{-n}e^{-inx} + \widehat{f}_n e^{inx}) = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right].$$

Merk nu op dat

$$\widehat{f}_{-n}e^{-inx} + \widehat{f}_n e^{inx} = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \tag{29}$$

met

$$a_n := \widehat{f}_n + \widehat{f}_{-n} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(e^{-int} + e^{int})dt \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos(nt)dt$$

en

$$b_n := i\,(\widehat{f}_n - \widehat{f}_{-n}) \;=\; \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(e^{-int} - e^{int})dt \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin(nt)dt.$$

We vatten de voorgaande discussie als volgt samen:

Gevolg 2.18 *Zij f een stuksgewijs continu differentieerbare 2π-periodieke functie. Veronderstel dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt:*

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]. \tag{30}$$

Dan is voor elke $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \quad = \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{31}$$

met

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \tag{32}$$

$$b_n \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \tag{33}$$

voor $n \geq 1$.

Gevolg 2.19 *Veronderstel dat f reëelwaardig is. Dan blijkt uit de bovenstaande formules dat de coëfficiënten a_n en b_n in de reeks (31) alle reëel zijn; in dat geval noemt men (31) ook wel de* reële Fourierreeks van f.

1. *Het rechterlid van (29) kan men nu ook nog anders schrijven. Er zijn namelijk reële getallen r_n en ϕ_n, met $r_n \geq 0$ en $-\pi < \phi_n \leq \pi$ zo dat*

   $$a_n = r_n \sin \phi_n \qquad \text{en} \qquad b_n = r_n \cos \phi_n. \tag{34}$$

   Daarmee wordt

   $$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = r_n \sin(nx + \phi_n),$$

   dus een trilling met amplitudo r_n, frequentie $\frac{n}{2\pi}$ en faseverschuiving ϕ_n. De reeks (31) is nu dus ook te schrijven als

   $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin(nx + \phi_n) \tag{35}$$

2. *Als f een* even functie *is (dwz. $f(t) = f(-t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$) dan is de integrand in* (33) *oneven. We zien dat dan $b_n = 0$ voor alle $n \geq 1$ en dat in* (31) *geen sinus-termen voorkomen.* Een even functie f, die ook voldoet aan de voorwaarden van Gevolg 2.18, wordt dus gegeven door een cosinusreeks*:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

waarin

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\; dt$$

en

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\; dt\;, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

3. *Als f een* oneven functie *is (dwz. $f(t) = -f(-t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$), dan is $a_n = 0$ voor alle $n \geq 0$. Dus* wordt een oneven functie f, die ook voldoet aan de voorwaarden van Gevolg 2.18, gegeven door een sinusreeks.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

waarin

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\; dt\;, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Tenslotte, vermelden we de volgende stelling:

Stelling 2.20 *Zij f een stuksgewijs continu differentieerbare 2π-periodieke functie. Dan convergeert de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2$ en geldt de* ***formule van Parseval***

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\; dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_n|^2\;. \tag{36}$$

Bewijs: (voor de liefhebber) Zij $N \in \mathbb{Z}$. We hebben

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right|^2 &= \left(f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right)\overline{\left(f(x)-\sum_{m=-N}^{N}\widehat{f}_m e^{imx}\right)} \\
&= \left(f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right)\left(\overline{f(x)}-\sum_{m=-N}^{N}\overline{\widehat{f}_m} e^{-imx}\right) \\
&= |f(x)|^2-\sum_{n=-N}^{N}\left[\widehat{f}_n\overline{f(x)}\,e^{inx}+\overline{\widehat{f}_n}f(x)\,e^{-inx}\right] \\
&\quad + \sum_{n,m=-N}^{N}\widehat{f}_m\overline{\widehat{f}_n}e^{i(m-n)x}.
\end{aligned}$$

Integreren over $[-\pi,\pi]$ en delen door 2π levert (met Definitie 2.14 en formules (13) en (14))

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right|^2 dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\sum_{n=-N}^{N}(|\widehat{f}_n|^2+|\widehat{f}_n|^2) \\
&\quad + \sum_{m=-N}^{N}|\widehat{f}_m|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\sum_{n=-N}^{N}|\widehat{f}_n|^2.
\end{aligned}$$

Dus geldt voor iedere stuksgewijs continu 2π-periodieke functie dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\sum_{n=-N}^{N}|\widehat{f}_n|^2$$

De Stelling 2.16 impliceert dat

$$\lim_{N\to\infty}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right|^2 = \left|f(x)-\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right|^2 = 0$$

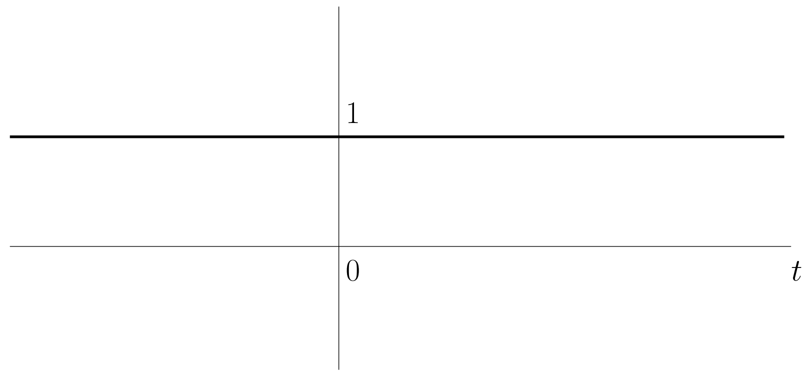
in ieder punt x dat geen discontinuïteitspunt is voor f. Omdat we slechts eindig veel discontinuïteitspunten op $[-\pi,\pi]$ hebben, geldt

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx}\right|^2 dx = 0\ ,$$

waaruit (36) volgt. ■

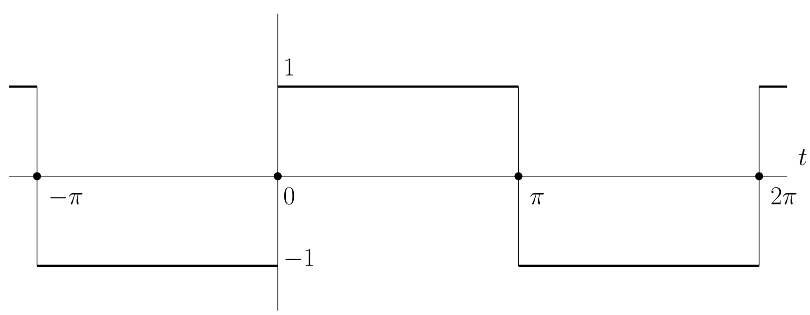
2.4 Voorbeelden

1. Neem voor f de constante functie 1; dus $f(t) = 1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.



Dan is voor $n \neq 0$:
$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dt = \frac{-1}{2\pi in}[e^{-in\pi} - e^{in\pi}] = 0$$
en voor $n = 0$:
$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 1.$$
De Fourierreeks heeft maar één term en reduceert tot
$$e^{i0x} = 1.$$

2. Neem voor f de 2π-periodieke functie gegeven door $f(t) = -1$ voor $-\pi < t < 0$ en $f(t) = 1$ voor $0 < t < \pi$ en $f(0) = f(\pi) = 0$.



Dan is voor $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt + \int_0^{\pi} e^{-int}dt\right] = \\ &= \frac{-1}{2\pi i n}[(-1+e^{in\pi}) + (e^{-in\pi}-1)] = \\ &= \frac{1}{\pi i n}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \quad \text{even} \\ \dfrac{2}{\pi i n} & \text{als} \quad n \quad \text{oneven}\end{cases}\end{aligned}$$

en voor $n = 0$:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} dt + \int_0^{\pi} dt\right] = 0.$$

De Fourierreeks is dus

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n \,\text{oneven}} \frac{2e^{inx}}{\pi i n}\ .$$

Deze reeks is geen absoluut convergente reeks, maar wegens Stelling 2.16 bestaat de limiet

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N,\, n\,\text{oneven}} \frac{2e^{inx}}{\pi i n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{0<n\leq N,\, n\,\text{oneven}} \frac{4}{\pi n}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx})}{2i}\right)\ ,$$

die omgeschreven kan worden tot de gewoon convergente sinusreeks

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

en is de som gelijk aan $f(x)$. Nemen we hier in het bijzonder $x = \frac{\pi}{2}$ dan zien we

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

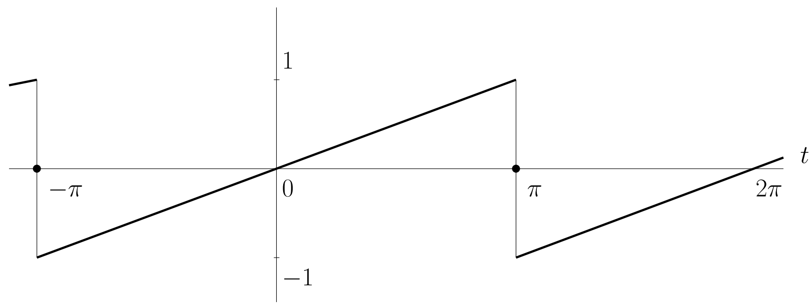
Laten we ook eens $x = \frac{\pi}{3}$ invullen. Dan is de functiewaarde $f(\frac{\pi}{3}) = 1$. Anderzijds is

$$\sin((2k+1)\frac{\pi}{3}) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{3}) &= \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{als } k & \text{deelbaar is door 3} \\ \sin(\pi) &= 0 & \text{als } k-1 & \text{deelbaar is door 3} \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{als } k+1 & \text{deelbaar is door 3}\end{cases}$$

Zo vinden we

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \ldots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

3. Neem voor f de 2π-periodieke functie gegeven door $f(t) = t$ voor $-\pi \leq t < \pi$ en $f(\pi) = 0$.



Dan is voor $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = \\
&= \frac{-1}{2\pi i n} \left[(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \right] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{in}
\end{aligned}$$

en voor $n = 0$:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} t dt \right] = 0.$$

De Fourierreeks is dus

$$\sum_{n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx}.$$

Deze reeks is geen absoluut convergente reeks, maar wegens Stelling 2.16 bestaat de limiet

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z},\, 0 < |n| \leq N} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n \in \mathbb{N},\, 0 < n \leq N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right).$$

Deze kan worden omgeschreven tot de convergente sinusreeks

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

met som gelijk aan x voor $-\pi < x < \pi$ en aan 0 voor $x = \pi$.

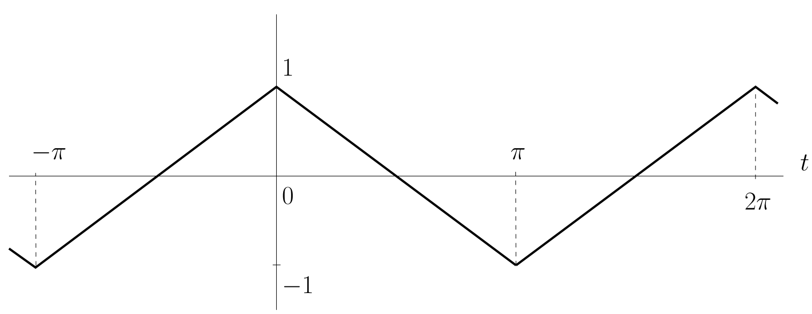
De formule van Parseval (36) luidt voor dit voorbeeld

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

hetgeen de volgende interessante identiteit oplevert:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{37}$$

4. Neem voor f de 2π-periodieke functie gegeven door $f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ voor $-\pi < t \leq \pi$.



Dan is voor $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dt + \int_{-\pi}^{0} te^{-int}dt - \int_{0}^{\pi} te^{-int}dt\right] = \\
&= \frac{-1}{2\pi i n}\left[0 + \pi e^{in\pi} - \int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt - \pi e^{-in\pi} + \int_{0}^{\pi} e^{-int}dt\right] \\
&= \frac{-1}{2\pi n^2}\left[-(1 - e^{in\pi}) + (e^{-in\pi} - 1)\right] \\
&= \frac{1}{\pi n^2}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \quad \text{even} \\ \dfrac{2}{\pi n^2} & \text{als} \quad n \quad \text{oneven} \end{cases}
\end{aligned}$$

en voor $n = 0$:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \int_{-\pi}^{0} tdt - \int_{0}^{\pi} tdt\right] = 0.$$

De Fourierreeks is dus

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\,\text{oneven}} \frac{e^{inx}}{n^2}.$$

Deze Fourierreeks is absoluut convergent. Stelling 2.16 levert in dit geval voor alle $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} - |x| &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty,\, n\,\text{oneven}}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}\\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

Substitutie $x = 0$ geeft

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.$$

Omdat $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ is, vinden we hier dus nog een bewijs voor de identiteit (37).

De formule van Parseval (36) luidt voor dit voorbeeld

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} &= \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{\pi^2}{4} + \pi t + t^2\right)dt + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \pi t + t^2\right)dt\right]\\ &= \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

Dus

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Omdat

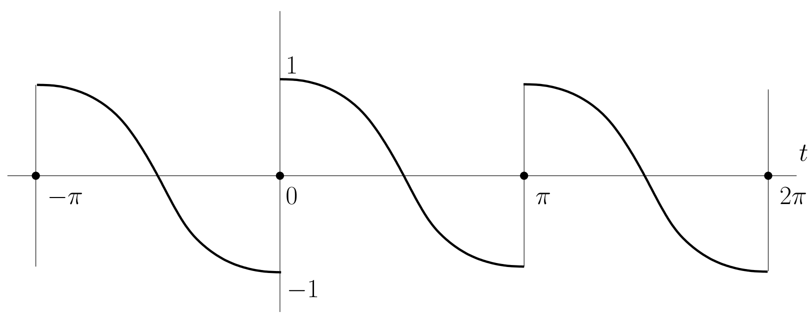
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{15}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

is, vinden we hier ook een bewijs van

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. In dit voorbeeld willen we $\cos x$ voor $0 \leq x < \pi$ als sinusreeks schrijven. Daarvoor gebruiken we de 2π-periodieke functie f op $\mathbb{R}$, die wordt gedefiniëerd door:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \cos x & \text{voor} \quad 0 < x < \pi \\ -\cos x & \text{voor} \quad -\pi < x < 0 \end{cases} \\ f(0) &= f(\pi) = 0 \end{aligned}$$



De functie f is een oneven stuksgewijs continue functie en is dus te ontwikkelen in een sinusreeks met coëfficiënten:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \, \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((n+1)t) + \sin((n-1)t)] \, dt = \\ &= \frac{2n[(-1)^n + 1]}{\pi(n^2-1)} \qquad \text{als} \quad n > 1, \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0.$$

We vinden

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin 2kx}{4k^2-1} \qquad \text{voor} \quad 0 < x < \pi.$$

2.5 Functies met een periode T

Zij T een positief reëel getal.

Definitie 2.21 *Een* periodieke functie met periode T *– of kortweg* een $2T$-periodieke functie *– is een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voldoet aan*

$$f(x+T) = f(x) \qquad \textit{voor alle} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Wanneer g een T-periodieke functie is, dan is de functie f gedefinieerd door

$$f(x) := g\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \qquad \text{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

periodiek met periode 2π. Laten we schrijven

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dan is

$$g(x) = f(\omega x).$$

Wanneer de functie g stuksgewijs continu differentieerbaar is en voldoet aan

$$g(x) = \frac{1}{2}[g(x^-) + g(x^+)] \qquad \text{voor alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

dan geldt dat ook voor de functie f en volgt uit de Fourierontwikkeling van f de Fourierontwikkeling van g:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(\omega x) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{i\omega n x} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\omega n x) + b_n\sin(\omega n x), \end{aligned}$$

waarin de coëfficiënten gegeven worden door de formules

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\int_{-\pi}^{\pi} g\left(\frac{T}{2\pi}t\right)e^{-in\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}t}\frac{T}{2\pi}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)e^{-i\omega nx}dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega nt}dt,
\end{aligned}$$

en

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\ dt,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos(\omega nt)\ dt, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(\omega nt)\ dt.
\end{aligned}$$

Dus is de volgende stelling bewezen:

Stelling 2.22 *Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een T-periodieke continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie. Dan*

$$\begin{aligned}
g(x) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{g}_n e^{i\omega nx} && (39) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\omega nx) + b_n\sin(\omega nx), && (40)
\end{aligned}$$

waarin

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

en

$$\widehat{g}_n = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-i\omega nt}dt, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{41}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\ dt, \tag{42}$$

en

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos(\omega nt)\ dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin(\omega nt)\ dt, \tag{43}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$.

♡ **Opmerking.** Als de T-periodieke functie g *even* of *oneven* is, dan overblijven in (40) alleen de cos- of de sin-termen, resp. (zie deel 3 van Gevolg 2.19). In deze gevallen kan men de coëfficiënten a_n of b_n met de integralen over $[0, T/2]$ berekenen. ♡

♢ **Voorbeeld.** Neem de π-periodieke functie f op $\mathbb{R}$, die wordt gedefiniëerd door $f(x) = \cos x$ voor $0 < x < \pi$ en $f(0) = 0$. Dan is $\omega = 2$ en geldt

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t\, dt = 0 \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos t \cos(2nt)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos((2n+1)t) + \cos((2n-1)t)]\, dt = 0 \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos t \sin(2nt)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)]\, dt = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}
\end{aligned}
$$

Zo vinden we, net als in het laatste voorbeeld van de vorige paragraaf,

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{n \sin 2nx}{4n^2-1} \qquad \text{voor} \quad 0 < x < \pi.$$

♢

2.6 Toepassing van Fourierreeksen bij lineaire differentiaalvergelijkingen

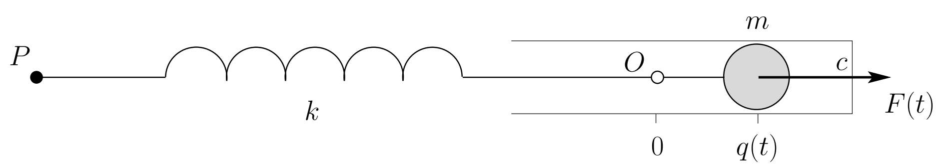
Sommige mechanische en elektrische systemen kunnen worden gemodelleerd met een differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t)\,. \tag{44}$$

Daarbij is $v(t)$ een onbekende functie die de toestand van het systeem op tijd t bepaalt, is $u(t)$ een gegeven functie die de externe invloed op het systeem beschrijft en zijn a_0 en a_1 reële constanten die relevante eigenschappen van het systeem weergeven.

$\diamondsuit$ **Voorbeelden**

1. Neem een voorwerp met massa m bevestigd aan het uiteinde van een veer met veerconstante k. Het andere uiteinde van de veer is vast bevestigd in een punt P. Neem verder aan dat het voorwerp langs een rechte lijn kan bewegen en daarbij wrijving ondervindt door een demper met wrijvingscoëfficiënt c. Op het voorwerp oefenen we een tijdsafhankelijke kracht uit ter grootte $F(t)$. Zij tot slot $q(t)$ de afstand van het voorwerp tot het evenwischtspunt O.



Dan leidt de tweede wet van Newton

$$\text{massa} \quad \times \quad \text{versnelling} \; = \; \text{kracht}$$

tot de differentiaalvergelijking

$$mq''(t) = -kq(t) - cq'(t) + F(t)$$

ofwel

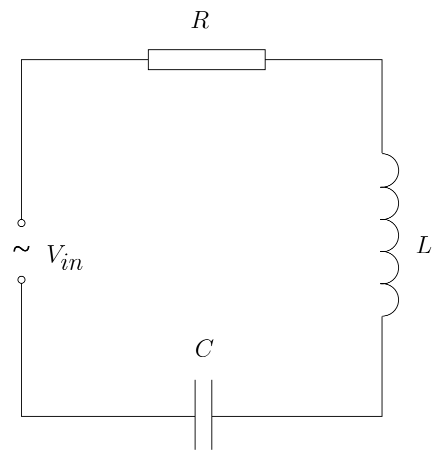
$$q''(t) + \frac{c}{m}\,q'(t) + \frac{k}{m}\,q(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Dit is een vergelijking (44).

2. Electrische netwerken bestaan uit een aantal componenten die op verschillende manieren verbonden kunnen zijn. De twee hoofdwetten van Kirchhoff beschrijven hoe de stroom en spanning zich gedragen in een schakeling:

   (a) Op ieder punt is de stroom die invloeit gelijk aan de stroom die uitvloeit.

   (b) Het spanningsverschil over iedere gesloten route door het netwerk is nul.



Neem de volgende componenten in een kring geschakeld:

- De spanningsbron (batterij), deze levert een *gegeven* tijdsafhankelijke spanning $V_{in}(t)$.
- De weerstand R is een component werkend volgens de wet van Ohm: $V_R = RI_R$. Hier is V_R de spanningsvermindering over R en I_R de stroom ter plekke van R.
- De spoel L legt de verhouding $V_L = LI'_L$ op.
- De condensator C induceert de afhankelijkheid $V'_C = \frac{1}{C} I_C$.

De eerste wet van Kirchhoff leert ons

$$I_V = I_R = I_C = I_L \equiv I, \tag{45}$$

waarin het 'definitie teken' aangeeft dat we alle stromen met I zullen aanduiden. De tweede wet levert

$$V_{in} = V_R + V_C + V_L, \tag{46}$$

waarbij V_{in} tegengesteld teken heeft, de batterij levert immers voltage. Om nu de relaties tussen stroom en spanning per component te kunnen gebruiken differentiëren we (46) naar t, dan

$$V'_{in} = V'_L + V'_R + V'_C = LI'' + RI' + \frac{1}{C} I.$$

Dit leidt tot een vergelijking (44), nl.

$$I''(t) + \frac{R}{L}\, I'(t) + \frac{1}{LC}\, I(t) = \frac{V'_{in}(t)}{L}\,.$$

$\diamondsuit$

In alle gevallen heet u het *ingangssignaal* terwijll v het *uitgangssignaal* heet. De vraag is:

Wat doet dit systeem met een periodiek ingangssignaal met periode T ?

Als we ervan uitgaan dat de functie u periodiek is met periode T en dat u tweemaal continu differentieerbaar is – het is aan de Natuurkunde om te bezien of dit een realistisch uitgangspunt is – dan wordt $u(t)$ gegeven door zijn Fourierreeks (zie Stelling 2.17):

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_n e^{in\omega t} \qquad \text{voor elke} \quad t \in \mathbb{R};$$

hier is $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Voor een eerste voorlopige analyse van het probleem veronderstellen we dat de functie v periodiek is met periode T en dat v tweemaal continu differentieerbaar is. Dan wordt $v(t)$ gegeven door zijn Fourierreeks:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_n e^{in\omega t} \qquad \text{voor elke} \quad t \in \mathbb{R}$$

Voorlopig veronderstellen we ook dat de afgeleide functies v' en v'' een Fourierreeks hebben die wordt verkregen door de de Fourierreeks van v eenmaal respectievelijk tweemaal term voor term te differentiëren. *Achteraf zullen we controleren of de gevonden functie v inderdaad aan deze veronderstellingen voldoet.*

Differentiaalvergelijking (44) komt dan neer op de volgende gelijkheid van Fourierreeksen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\omega^2 n^2 + i a_1 \omega n + a_0)\widehat{v}_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_n e^{in\omega t} \tag{47}$$

Merk op dat
$$-\omega^2 n^2 + ia_1\omega n + a_0 = P(in\omega)$$
waarin P de *karakteristieke veelterm* van de homogene differentiaalvergelijking is, nl.
$$P(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$
Tot zover de voorlopige analyse.

Gelijkheid (47) brengt ons op het volgende idee: Gegeven zijn de functie u en zijn Fouriercoëfficiënten $\widehat{u}_n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Daarbij *definiëren* we vervolgens de rij complexe getallen $\{\widehat{v}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ door

$$\widehat{v}_n := \frac{\widehat{u}_n}{P(in\omega)} = \frac{\widehat{u}_n}{-\omega^2 n^2 + ia_1\omega n + a_0} \tag{48}$$

Wanneer a_0 *en* a_1 *reële getallen ongelijk* 0 *zijn, is voor geen enkele* n *de noemer in (48) gelijk aan* 0. De getallen $\widehat{v}_n$ zijn dan dus goed gedefinieerd.

Volgens schatting (28) in het bewijs van Stelling 2.17 is er een constante K_1 zo dat
$$|\widehat{u}_n| < \frac{K_1}{n^2} \qquad \text{voor elke } \ n \in \mathbb{Z}. \tag{49}$$
Vervolgens zien we met formule (48) dat er een constante K_2 is zo dat

$$|\widehat{v}_n| < \frac{K_2}{n^4} \qquad \text{voor elke } \ n \in \mathbb{Z}.$$

Dit tesamen met het majorantie kenmerk impliceert dat de reeksen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\widehat{v}_n$, $\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\widehat{v}_n$ absoluut convergeren.

We kunnen nu dus een functie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiëren door

$$v(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_n e^{in\omega t}. \tag{50}$$

Deze functie voldoet dan aan de differentiaalvergelijking (44).

♡ **Opmerking.** Merk op dat de schatting (49) ook voor sommige *continue stuksgewijs continu-differentieerbare* functies $u(t)$ geldt en dus werkt de methode niet alleen voor de tweemaal continu differentieerbare functies. In dit geval convergeert de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_n e^{in\omega t}$ naar $\frac{1}{2}(u(t^+) + u(t^-))$. Dus voldoet de functie $v(t)$ gegeven door (50) aan de differentiaalvergelijking (44) alleen in punten t die geen uitzonderingspunten voor u zijn.

De methode werkt ook als de Fourierreeks voor $u(t)$ slechts *eindig veel* termen heeft. $\heartsuit$

De functie v uit formule (50) geeft dus een bijzondere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (44). De andere oplossingen van (44) zijn $v(t) + h(t)$ waarbij h een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking

$$h''(t) + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = 0 \tag{51}$$

De algemene theorie van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten (zie Appendix 2) leert dat, als $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ is, de oplossing wordt gegeven door

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

voor zekere constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ en met λ_1, λ_2 de twee (complexe) wortels van de *karakteristieke vergelijking*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

dwz.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\,.$$

Als $a_1^2 - 4a_0 > 0$, $a_0 > 0$ en $a_1 > 0$ zijn, dan zijn λ_1 en λ_2 beide reëel en negatief. De functie $h(t)$ dempt dan dus exponentieel uit.

Als $a_1^2 - 4a_0 < 0$ en $a_1 > 0$ zijn, dan zijn λ_1 en λ_2 complexe getallen met reëel deel $-a_1/2$ en is

$$|h(t)| \leq (|c_1| + |c_2|)e^{-a_1 t/2}.$$

Dus ook in dit geval dempt $h(t)$ exponentieel uit.

Tot slot als $a_1^2 - 4a_0 = 0$ (dwz. $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_1/2$) en $a_1 > 0$ dan leert de algemene theorie

$$h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-a_1 t/2}.$$

Ook nu weer dempt $h(t)$ exponentieel uit.

Als gezegd, de algemene oplossing van (44) is $v(t) + h(t)$ waarbij v de functie is uit formule (50) en h een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking (51). We hebben gezien dat onder fysisch realistische condities de functie $h(t)$ exponentieel uitdempt, waardoor we, na een aanlooptijd, als waarneembaar uitgangssignaal altijd de functie v uit formule (50) zien.

De constante a_1 geeft de wrijving (of weerstand) in het systeem. Het is voor dit verhaal dus essentieel dat er weerstand in het systeem is. Tengevolge van die weerstand dempt de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking uit.

Laten we nu de relatie (48), die het verband geeft tussen het ingangssignaal $u(t)$ en het (uiteindelijke) uitgangssignaal $v(t)$, nader analyseren en interpreteren. In fysisch realistische situaties is het ingangssignaal een reëelwaardige functie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dit impliceert voor elke $n \in \mathbb{Z}$:

$$\widehat{u}_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{u(t)e^{-in\omega t}}dt = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\omega t}dt} = \overline{\widehat{u}_n}\,;$$

dwz. $\widehat{u}_{-n}$ is de complex geconjugeerde van $\widehat{u}_n$. Uit (48) zien we dan dat

$$\widehat{v}_{-n} = \overline{\widehat{v}_n} \qquad \text{voor elke} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Schrijf nu $\widehat{u}_n = r_n e^{i\phi_n}$ met $r_n \in \mathbb{R}$, $r_n \geq 0$ en $-\pi < \phi_n \leq \pi$. Dan is $\widehat{u}_{-n} = \overline{\widehat{u}_n} = r_n e^{-i\phi_n}$. De Fourierreeks van $u(t)$ kan nu worden herschreven als

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_n e^{in\omega t} \\ &= \widehat{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(e^{i(\phi_n+n\omega t)} + e^{-i(\phi_n+n\omega t)}) \\ &= \widehat{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2r_n\cos(n\omega t+\phi_n) \end{aligned}$$

Schrijven we $\quad \dfrac{1}{-\omega^2n^2+ia_1\omega n+a_0} = A_n e^{i\alpha_n} \quad$ met $-\pi < \alpha_n \leq \pi$ en

$$A_n = \frac{1}{|-\omega^2n^2+ia_1\omega n+a_0|}\,,$$

dan blijkt

$$\widehat{v}_n = A_n r_n e^{i(\phi_n+\alpha_n)}.$$

De Fourierreeks van $v(t)$ kan dus worden geschreven als

$$v(t) = \frac{\widehat{u}_0}{a_0} + \sum_{n\geq 1} 2A_n r_n \cos(n\omega t + \phi_n + \alpha_n)$$

Conclusie: Wanneer we in- en uitgangssignaal vergelijken zien we dat de component met frequentie $\frac{n\omega}{2\pi} = \frac{n}{T}$ een faseverschuiving α_n ondergaat en dat zijn amplitudo wordt vermenigvuldigd met een factor A_n.

In hoeverre de component met frequentie $\frac{n\omega}{2\pi}$ door dit systeem wordt versterkt of verzwakt hangt af van de waarde van A_n. Om hierin meer inzicht te krijgen merken we op dat

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

zodat

$$P(in\omega) = (in\omega - \lambda_1)(in\omega - \lambda_2).$$

We zien dat

$$A_n = \frac{1}{|in\omega - \lambda_1||(in\omega - \lambda_2|}$$

en dat dit afhangt van de afstand in het complexe vlak tussen $in\omega$ en de twee karakteristieke wortels $\lambda_{1,2}$: hoe groter die afstand, des te meer wordt die component in het signaal verzwakt, terwijl frequenties met $in\omega$ dicht bij (een van) de karakteristieke wortels juist worden versterkt.
Opgave: Voorzie het bovenstaande verhaal van een bruikbare tekening.

♢ **Voorbeeld.** Beschouw de volgende inhomogene differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = u(t) \tag{52}$$

met de 2π-periodieke functie $u(t)$ gegeven door $u(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ voor $t \in (-\pi, \pi]$.

Hierin is $\omega = 1$. Volgens Voorbeeld 4 van paragraaf 2.4,

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n \text{ oneven}} \frac{e^{int}}{n^2}.$$

met

$$\widehat{u}_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De karakteristieke veelterm van de homogene differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = 0$$

is $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ zodat

$$\widehat{v}_n = \frac{\widehat{u}_n}{P(in\omega)} = \frac{2}{\pi n^2 (in+1)^2}.$$

De functie

$$v(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z},\, n\,\text{oneven}} \frac{e^{int}}{n^2(in+1)^2}$$

geeft dus een bijzondere oplossing van de differentiaalvergelijking (52). Die kan worden omgeschreven tot

$$v(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N},\, n\,\text{oneven}} \frac{(1-n^2)\cos(nt) + 2n\sin(nt)}{n^2(n^2+1)^2}.$$

We hebben dus

$$v(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{225}\cos 3t + \frac{1}{150}\sin 3t + \cdots\right),$$

vaaruit volgt dat

$$\widetilde{v}(t) = \frac{2}{\pi}\sin t$$

een zeer goede benadering voor $v(t)$ is.

De wortels van $P(\lambda)$ zijn $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} = (c_1 + c_2 t)e^{-t}.$$

De functie $h(t)$ dempt dus exponentieel uit, waardoor de algemene oplossing van (52) op den duur door de functie $v(t)$ is bepaald. $\diamondsuit$

Tot nu toe hebben we gekeken naar eenvoudige fysische systemen die konden worden gemodelleerd met een tweede orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Een aantal ingewikkelder systemen kan ook worden gemodelleerd met een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, maar dan van hogere orde:

$$v^{(m)}(t) + a_{m-1}v^{(m-1)}(t) + \ldots + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t). \tag{53}$$

Met $v^{(k)}(t)$ geven we hier de k-de afgeleide van de functie v aan.

De beschreven methode werkt ook in deze gevallen. Neem aan dat de functie $u(t)$ tweemaal continu-differentieerbaar is en dat de *karakteristieke veelterm*

$$P(z) := z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

van de homogene differentiaalvergelijking $v^{(m)}+a_{m-1}v^{(m-1)}+\ldots+a_1v'+a_0v = 0$ geen nulpunten met $\mathrm{Re}\, z = 0$ heeft. Dan geeft de formule (50) met

$$\widehat{v}_n = \frac{\widehat{u}_n}{P(in\omega)} = \frac{\widehat{u}_n}{(in\omega)^m + (in\omega)^{m-1}a_{m-1} + \cdots + in\omega a_1 + a_0}$$

een oplossing van (53).

2.7 Opgaven

1. Bepaal de Fourierreeks van de volgende 2π-periodieke functies:

   (a) $f(\pi) = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -\pi < x \le 0 \\ x & \text{als} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$

   (b) $f(0) = f(\pi) = \frac{5}{2}, \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{als} \quad -\pi < x < 0 \\ 3 & \text{als} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & \text{als} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$

2. Bepaal de Fourierreeks van de volgende functies met periode 2:

   (a) $f(x) = \sin x \quad$ als $-1 < x < 1, \quad f(1) = 0.$

   (b) $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -1 < x < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

3. In deze opgaven bekijken we *even* 2π*-periodieke functies.* Gevraagd wordt om deze functies te schrijven als cosinusreeks:

   (a) $f(x) = \sin x \quad$ als $0 \le x \le \pi.$

(b) $f(x) = x \quad$ als $0 \leq x \leq \pi$.

(c) $f(x) = \pi - x \quad$ als $0 \leq x \leq \pi$.

4. Zij $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Bepaal de Fourierreeks van de 2π-periodieke functie f gegeven door $f(x) = e^{ax}$ als $-\pi < x < \pi$, $\quad f(\pi) = \frac{1}{2}(e^{-a\pi} + e^{a\pi})$.

   Bereken hiermee vervolgens
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

5. We bekijken de 2π-periodieke functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die wordt gedefinieerd door
   $F(x) = x^3 - \pi^2 x$ voor $-\pi \leq x \leq \pi$.

   (a) Teken de grafiek van F op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.

   (b) Laat zien dat F een continue, stuksgewijs continu differentieerbare functie is.

   (c) Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $F(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*}\, c_n e^{inx}$

   met $c_0 = 0$ en $c_n = -6i\dfrac{(-1)^n}{n^3}$ als $n \neq 0$.

   (d) Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt
   $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad \text{met } b_n = 2ic_n\,.$$

   (e) Waarom is $\displaystyle\int_0^{\pi} F(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$?

   (f) Bereken m.b.v. de vorige onderdelen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

6. We bekijken de 2π-periodieke functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die wordt gedefinieerd door $F(x) = x^2 - \pi^2$ voor $-\pi < x \leq \pi$.

   (a) Teken de grafiek van F op het interval $[-3\pi, 3\pi]$.

   (b) Laat zien dat F een continue, stuksgewijs continu differentieerbare functie is.

(c) Bereken de coëfficiënten c_n zo dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{*} c_n e^{inx}.$$

(d) Bereken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

7. We bekijken de 2π-periodieke functie $F(x) = |\sin x|$ voor $x \in \mathbb{R}$.

(a) Teken de grafiek van F op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Laat zien dat F een continue, stuksgewijs continu differentieerbare even functie is.

(c) Bereken de coëfficiënten a_n van de cosinusreeks

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx.$$

8. Los de volgende beginwaardenproblemen op volgens de methode van Appendix 2.A.

(a) $y'' - y' - 2y = 0\,, \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 3.$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0\,, \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 3.$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0\,, \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 3.$

(d) $y'' - 2y' + 5y = 5\,, \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 3.$

9. Vind de algemene oplossing $y(t)$ van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$y'' + 3y' + 2y = \cos t + \sin 2t$$

volgens de methode van paragraaf 2.6 en Appendix 2.A.

Appendix 2.A: Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

Laat $a_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, en $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue functies zijn. De oplossingen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$a_n(x)f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = 0 \quad (54)$$

vormen een lineaire ruimte.

Opgave: Ga dat na.

> **I Dimensiestelling**
> *De dimensie van de oplossingsruimte van een homogene lineaire differentiaalvergelijking is gelijk aan de orde n van de differentiaalvergelijking.*

(Dit geldt op intervallen waarop de voorfactor $a_n(x)$ van de hoogste afgeleide geen nulpunten heeft.) Dat is veel moeilijker te bewijzen.

Zonder termen uit de lineaire algebra te gebruiken, kunnen we dit resultaat als volgt beschrijven:
Als n de orde van de differentiaalvergelijking is, dan zijn er n oplossingen $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te vinden zó dat elke oplossing $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ op één manier te schrijven is als $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$, met reële getallen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Zo'n n-tal $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ noemt men een basis van de "lineaire ruimte" van oplossingen. Zo'n basis is niet uniek. Het getal n noemt men de dimensie van de lineaire ruimte.

Voor inhomogene differentiaalvergelijkingen

$$a_n(x) f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) f'(x) + a_0(x) f(x) = b(x), \quad (55)$$

is het weer van belang één oplossing te vinden. Dan krijgt men ze allemaal door er de oplossingen van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking bij op te tellen.

We kijken hier alleen naar lineaire differentiaalvergelijkingen met *constante coëfficiënten*. Dat wil zeggen dat de voorfactoren $a_j(x)$ van de onbekende functie en zijn afgeleiden niet van de variabele x afhangen.

Homogeen

Een homogene lineaire differentiaalvergelijking van orde 2 met constante coefficiënten kan men schrijven als

$$f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0. \quad (56)$$

Hierin is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de onbekende functie en zijn a_1 en a_0 reële getallen. De dimensie van de oplossingsruimte is 2. Het blijkt dat meestal twee exponentiële functies een basis van de oplossingsruimte vormen. Laten we bijvoorbeeld $f''(x) + 6f'(x) + 5f(x) = 0$ bekijken. Als $f(x) = e^{\lambda x}$ een oplossing is dan moet $\lambda^2 e^{\lambda x} + 6\lambda e^{\lambda x} + 5e^{\lambda x} = 0$. Die e-macht is ongelijk aan nul. Wegdelen levert de vergelijking $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, met oplossingen $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -5$.

Opgave Controleer dat $x \mapsto e^{-x}$ en $x \mapsto e^{-5x}$ inderdaad oplossingen zijn.

Omdat e-machten met verschillende voorfactoren in hun exponent lineair onafhankelijk zijn, hebben we een basis van de oplossingsruimte gevonden.

Dit geldt algemeen. Door in differentiaalvergelijking (56) $f(x) = e^{\lambda x}$ te proberen vindt men een vergelijking $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Als deze vergelijking twee verschillende oplossingen heeft, dan leveren de overeenkomstige exponentiële functies een basis van de oplossingsruimte. Dit geldt ook voor hogere orde differentiaalvergelijkingen:

II Homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.
Als de vergelijking

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

n verschillende oplossingen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ heeft, dan vormen $x \mapsto e^{\lambda_1 x}$, $x \mapsto e^{\lambda_2 x}$, $\ldots$, $x \mapsto e^{\lambda_n x}$ een basis van de oplossingsruimte van de differentiaalvergelijking

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Bijvoorbeeld bij $f'''(x) - 3f''(x) + 2f'(x) = 0$ hoort de vergelijking $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Omdat $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)$ hebben we een oplossing $\lambda_1 = 0$, en vinden we $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 1$ door de vierkantsvergelijking $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ op te lossen. Alle oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn

$$x \mapsto c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^x,$$

met c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$.

Bij deze aanpak kunnen twee dingen fout gaan: er kunnen gelijke λ's optreden en er kunnen complexe λ's voorkomen. In het laatste geval worden alle *complexe* oplossingen nog steeds gegeven door $c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$ met

λ_1 en λ_2	basis	
$\lambda_1 \neq \lambda_2,$ beide reëel	$f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$	$f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2,$ reëel	$f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$	$f_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$ μ, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$	$f_1(x) = e^{\mu x} \cos \nu x$	$f_2(x) = e^{\mu x} \sin \nu x$

Tabel 1: Basisoplossingen van tweede orde lineaire homogene differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (mits alle λ's verschillend zijn). Maar het is praktisch om te weten welke van deze oplossingen reëel zijn. Alleen voor tweede orde differentiaalvergelijkingen bespreken we wat in deze gevallen gedaan kan worden.

III Homogene lineaire tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.
Laat λ_1, λ_2 de oplossingen zijn van de vergelijking $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Een basis f_1, f_2 van de oplossingsruimte van differentiaalvergelijking (56) is af te lezen in tabel 1.

Bijvoorbeeld zoeken we de oplossing van $h''(y) + 2h'(y) + h(y) = 0$ die voldoet aan $h(1) = h(0) = 1$. De vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ heeft een dubbele wortel -1. Dus alle oplossingen hebben de vorm $h(y) = (c_1 + c_2 y)\, e^{-y}$. We vullen in $1 = h(1) = (c_1 + c_2)\, e^{-1}$ en $1 = h(0) = c_1 e^0$. Dus $c_1 = 1$ en $c_2 = e - 1$. De gevraagde oplossing is $h(y) = (1 + (e-1)y)\, e^{-y}$.

De differentiaalvergelijking $\varphi''(t) = -\frac{g}{l}\varphi(t)$ leidt tot de vergelijking $\lambda^2 = -\frac{g}{l}$. Dus $\lambda_1 = i\sqrt{g/l}$ en $\lambda_2 = -i\sqrt{g/l}$. In de tabel hierboven is $\mu = 0$ en $\nu = \sqrt{g/l}$. Alle oplossingen worden gegeven door $\varphi(t) = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t$ met c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Dat zijn periodieke bewegingen. De constanten c_1 en c_2 bepalen de amplitude en de fase. De periode $\frac{2\pi}{\nu} = 2\pi\sqrt{l/g}$ is onafhankelijk van de amplitude.

Inhomogeen

Het algemene idee is:

IV Inhomogene lineaire differentiaalvergelijking.
Laat f_0 een oplossing zijn van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = b(x).$$

Dan hebben alle oplossingen van deze differentiaalvergelijking de vorm $f = f_0 + \tilde{f}$, waarbij $\tilde{f}$ de oplossingen doorloopt van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Opgave: In het voorbeeld $f''(t)+6f'(t)+5f(t) = 1$ is één oplossing niet zo moeilijk te vinden. Probeer maar een constante oplossing. Twee bladzijden hiervoor hebben we de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking al opgelost. Dat leidt tot $f(x) = \frac{1}{5} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}$ als formule voor alle oplossingen.

Voor het zoeken van één oplossing helpt het volgende schema van **slim proberen:**

de functie $b(x)$ is:	probeer als oplossing:
een constante	een constante
een veelterm van graad n	een veelterm van graad $\leq n$
e^{ax}	een veelvoud van e^{ax}
$\sin ax$ of $\cos ax$	een lineaire combinatie van $\sin ax$ en $\cos ax$
lineaire combinaties van het bovenstaande	lineaire combinaties van wat hierboven staat

Dit werkt niet altijd. Probeer nog een extra factor x voordat u het helemaal opgeeft.

Appendix 2.B: De discrete Fouriertransformatie

Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een 2π-periodieke continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie zijn. Dan

$$f(t) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} \widehat{f}_k e^{ikt} \qquad \text{met} \qquad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt\,.$$

De integraal over $[0, 2\pi]$ van een continue functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan benadered worden met de *trapeziumregel*:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F(t)dt &\approx h\left[\frac{F(0)+F(h)}{2} + \cdots + \frac{F((N-1)h)+F(Nh)}{2}\right] \\ &= h\left[\frac{1}{2}F(0) + F(h) + F(2h) + \cdots + F((N-1)h) + \frac{1}{2}F(Nh)\right]\end{aligned}$$

waarbij $N > 1$ een groot geheel getal is en

$$h := \frac{2\pi}{N}.$$

Als F 2π-periodiek is, dan $F(0) = F(Nh)$ en

$$\int_0^{2\pi} F(t)dt \approx h\sum_{j=0}^{N-1} F(jh) = \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{2\pi j}{N}\right).$$

Uit deze formule blijkt (met $F(t) = f(t)e^{-ikt}$) dat

$$\widehat{f}_k \approx \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right) e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}.$$

Definiëren we nu

$$\omega := e^{\frac{2\pi i}{N}} \tag{57}$$

en

$$y_j := f(jh) = f\left(\frac{2\pi j}{N}\right).$$

Dan

$$\widehat{f}_k \approx \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j\overline{\omega}^{jk}.$$

Dit leidt tot de volgende definitie:

I DFT

Zij $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ een rij complexe getallen die periodiek is met periode N, d.w.z. $y_{j+N} = y_j$ voor elke $j \in \mathbb{Z}$. De discrete Fouriertransformatie (DFT) *van $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ is de rij $\{\widehat{y}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ gedefinieerd door*

$$\widehat{y}_k := \sum_{j=0}^{N-1} y_j\overline{\omega}^{jk} \qquad \text{met} \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}.$$

Merk op dat $\overline{\omega}^N = e^{2\pi i} = e^0 = 1$. Dit impliceert

$$\sum_{j=0}^{N-1} y_j \overline{\omega}^{j(k+N)} = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \overline{\omega}^{jk} \left(\overline{\omega}^N\right)^j = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \overline{\omega}^{jk}$$

ofwel

$$\widehat{y}_{k+N} = \widehat{y}_k \quad \text{voor alle} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Dus is de rij $\{\widehat{y}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ook periodiek met periode N.

Vervolgens kunnen we alleen $j, k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ beschouwen en vectoren $y, \widehat{y} \in \mathbb{C}^N$ introduceren:

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \; \widehat{y} = \begin{pmatrix} \widehat{y}_0 \\ \widehat{y}_1 \\ \vdots \\ \widehat{y}_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Dan is DFT equivalent met het matrix-vector produkt $\widehat{y} = Fy$, waarin de $N \times N$ complexe matrix F de elementen

$$F_{kj} = \overline{\omega}^{kj}$$

heeft.

Lemma 2.23 *Er geldt $\overline{F}F = N\,E_N$ waarin E_N de $N \times N$ eenheidsmatrix is.*

Bewijs: Uit de formule (57) volgt $|\omega| = 1$. Verder $\overline{\omega}^N = 1$ impliceert dat $\omega^N = 1$. We hebben

$$(\overline{F}F)_{lj} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{F}_{lk} F_{kj} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{lk} \overline{\omega}^{kj} = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^k)^l (\overline{\omega}^k)^j \,.$$

Als $l = j$ dan

$$(\overline{F}F)_{jj} = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^k)^j (\overline{\omega}^k)^j = \sum_{k=0}^{N-1} (|\omega|^{2k})^j = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N \,.$$

Als $l \neq j$ bijv. $l = j + m$ met $m > 0$, dan

$$(\overline{F}F)_{j+m,j} = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^k)^{j+m} (\overline{\omega}^k)^j = \sum_{k=0}^{N-1} (|\omega|^{2k})^j (\omega^k)^m = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^m)^k .$$

Maar

$$\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k = \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda} .$$

Hieruit volgt (met $\lambda = \omega^m$ en $\omega^N = 1$):

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\omega^m)^k = \frac{1-(\omega^m)^N}{1-\omega^m} = \frac{1-(\omega^N)^m}{1-\omega^m} = \frac{1-1}{1-\omega^m} = 0.$$

Dus geldt: $(\overline{F}F)_{j+m,j} = 0$. $\square$

Het lemma impliceert dat

$$F^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F} .$$

Daarmee hebben we de volgende stelling bewezen:

II IDFT

De inverse discrete Fouriertransformatie (IDFT) is gegeven door

$$y_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{y}_k \omega^{kj}$$

voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Voor twee complexe vectoren $y, z \in \mathbb{C}^N$ definieert men het *scalairprodukt* door

$$\langle y, z \rangle := \sum_{k=0}^{N-1} \overline{y}_k z_k .$$

Voor iedere complexe $N \times N$ matrix F geldt dan $\langle y, Fz \rangle = \langle \overline{F}^{\mathrm{T}} y, z \rangle$. Hierin staat $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ voor het matrix-transponeren. Verder geldt $F^{\mathrm{T}} = F$ en dus $\overline{F}^{\mathrm{T}} = \overline{F}$. Met deze resultaten en Lemma 2.23 krijgen we

$$\langle \widehat{y}, \widehat{y} \rangle = \langle Fy, Fy \rangle = \langle \overline{F}^{\mathrm{T}} Fy, y \rangle = \langle (\overline{F}F) y, y \rangle = \langle N\, E_N y, y \rangle = N \langle y, y \rangle .$$

Dit geeft de volgende stelling:

III Discrete formule van Parseval
Zij $\{\widehat{y}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de DFT van $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Dan geldt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\widehat{y}_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|y_k|^2.$$

♡ **Opmerking.** Er is een efficiente manier om DFT te berekenen die *FFT* heet (*engels: Fast Fourier Transform*). Volgens de definitie van DFT,

$$\widehat{y}_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j\overline{\omega}^{jk} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

moeten we N complexe vermeningvuldigen uitvoeren voor elke k om alle $\widehat{y}_k$ te berekenen. Het lijkt dus dat de uitvoeringstijd $O(N^2)$ moest zijn.

Stel nu dat $N = pq$ met $p, q \in \mathbb{N}$ en $p, q > 1$. Dan kunnen we schrijven

$$j = \alpha p + \beta$$

met $0 \le \alpha \le q-1,\ 0 \le \beta \le p-1$. Hieruit volgt dat

$$\widehat{y}_k = \sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1} y_{\alpha p+\beta}\overline{\omega}^{(\alpha p+\beta)k} = \sum_{\beta=0}^{p-1}\left(\sum_{\alpha=0}^{q-1} y_{\alpha p+\beta}\overline{\omega}^{\alpha pk}\right)\overline{\omega}^{\beta k}.$$

Dus

$$\widehat{y}_k = \sum_{\beta=0}^{p-1}\widehat{y}_{\beta,k}\overline{\omega}^{\beta k} \qquad \text{met} \quad \widehat{y}_{\beta,k} := \sum_{\alpha=0}^{q-1} y_{\alpha p+\beta}\overline{\omega}^{\alpha pk}$$

zodat

$$\widehat{y}_{\beta,k+q} = \widehat{y}_{\beta,k}$$

voor $0 \le \beta \le p-1$ en alle k. Wegens deze eigenschap, hoeven we $\widehat{y}_{\beta,k+q}$ alleen te berekenen voor $0 \le k \le q-1$ (niet voor alle $0 \le k \le N-1$). We moeten dus q complexe vermeningvuldigen uitvoeren voor elke (β, k) met $\beta = 0, 1, \ldots, p-1$ en $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Dit geeft $pq \cdot q = Nq$ vermeningvuldigen.

Daarna moeten we nog p vermeningvuldigen uitvoeren om elke $\widehat{y}_k$ te berekenen voor $k = 0, 1, \ldots, N$. Dit geeft Np vermeningvuldigen. De totale uitvoeringstijd wordt $O(Nq + Np) = O(N(p+q))$, veel kleiner dan $O(N^2)$ omdat $p + q \ll pq$ voor voldoende groot p en q.

Als $N = p_1 p_2 \cdots p_n$ dan is de uitvoeringstijd $O(N(p_1 + p_2 + \cdots + p_n))$. Met name, als

$$N = 2^L = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{L}$$

dan $L = \log_2 N$ en is de uitvoeringstijd

$$O(N\,2L) = O(NL) = O(N\,\log_2 N)\,,$$

veel kleiner dan $O(N^2)$. ♡

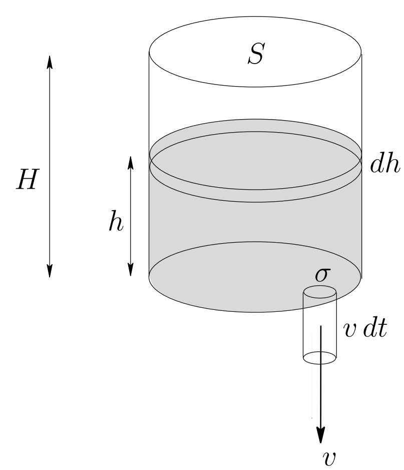
3 Oneigenlijke integralen

3.1 Definitie en voorbeelden

Uit eerdere wiskunde cursussen zijn we bekend met de betekenis van de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ wanneer f een continue reëelwaardige functie is op een gesloten interval $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ van de reële lijn $\mathbb{R}$. In dit hoofdstuk bekijken we zogenaamde *oneigenlijke integralen* $\int_a^b f(x)\,dx$; daarbij is slechts gegeven dat f een continue reëelwaardige functie is op het open interval $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (of op de half-open intervalen $[a,b)$ of $(a,b]$). En passant wordt de mogelijkheid geopend om $a = -\infty$ of $b = \infty$ te nemen.

Oneigenlijke integralen zullen we gebruiken in het Hoofdstuk 4 dat over Fourier transformaties gaat. Ook komen deze integralen vaak in de Natuurkunde voor.

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Beschouw een cylindrische emmer met hoogte H en dekseloppervlakte S waaruit een ideale vloeistof uitstroomt door een gat met oppervlakte σ. De vraag is: Hoe lang duurt het totdat de emmer helemaal leeg is?



De wet van Toricelli (het behoud van energie) zegt dat de uitstroomsnelheid is

$$v = \sqrt{2gh}$$

waarin h het vloeistofpeil en g de zwaartekrachtversnelling zijn. Het volume van de vloeistof die tijdens de infinitesimale tijd dt uitstroomt is

$$\sigma v\, dt = \sigma\sqrt{2gh}\, dt = -S\, dh$$

waarin dh de infinitesimale daling van het vloeistofspeil is (vandaar het minteken). De emmer is helemaal leeg na

$$T = \int_0^T dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{S}{\sigma\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}\,.$$

De integraal rechts is een oneigenlijke integraal, omdat de functie

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

continu is op $(0, H]$ maar $f(h) \to \infty$ als $h \downarrow 0$, zodat f geen continue functie is op $[0, H]$.

De volgende constructie biedt een oplossing. Neem een klein $\varepsilon > 0$. Dan is f continu op $[\varepsilon, H]$ en zijn integraal daarover is goed gedefinieerd:

$$\int_\varepsilon^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}\Big|_\varepsilon^H = 2\sqrt{H} - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Bovendien bestaat de limiet

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{H}\,.$$

De conclusie is

$$\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{H}$$

en dus

$$T = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}\,.$$

$\diamondsuit$

Nu kunnen we de algemene definitie geven:

Definitie 3.1 *Zij f een continue reëelwaardige functie op het open interval (a, b) in $\mathbb{R}$; hier mag $a, b \in \mathbb{R}$, maar ook $a = -\infty$ of $b = \infty$ zijn. Dan zeggen we dat de* oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ convergeert *als voor een $c \in (a, b)$ beide limieten*

$$\lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(x)\,dx \qquad en \qquad \lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(x)\,dx \tag{58}$$

bestaan als reële getallen. Merk op dat de integralen $\int_p^c f(x)\,dx$ en $\int_c^q f(x)\,dx$ in (58) van het klassieke type "continue functie op een gesloten interval" zijn.

Alleen als de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ convergeert, kennen we er een getalwaarde aan toe, namelijk

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(x)\,dx + \lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(x)\,dx. \tag{59}$$

In plaats van " de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ convergeert" zullen we ook vaak zeggen " de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ bestaat".

Als een oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ niet *convergeert, zeggen we dat hij* divergeert.

♡ Opmerkingen

1. De bovenstaande definitie hangt niet echt af van c: wanneer c, c' in (a, b) liggen en $c < c'$, dan is voor elke $p \in (a, c)$ en elke $q \in (c', b)$

$$\begin{aligned} \int_p^{c'} f(x)\,dx &= \int_p^c f(x)\,dx + \int_c^{c'} f(x)\,dx, \\ \int_{c'}^q f(x)\,dx &= \int_c^q f(x)\,dx - \int_c^{c'} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dus bestaat $\lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(x)\,dx$ dan en slechts dan als $\lim_{p \downarrow a} \int_p^{c'} f(x)\,dx$ bestaat, en bestaat $\lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(x)\,dx$ dan en slechts dan als $\lim_{q \uparrow b} \int_{c'}^q f(x)\,dx$ bestaat. Bovendien is, als die limieten bestaan,

$$\lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(x)\,dx + \lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(x)\,dx = \lim_{p \downarrow a} \int_p^{c'} f(x)\,dx + \lim_{q \uparrow b} \int_{c'}^q f(x)\,dx.$$

2. Als $a \neq -\infty$, $b \neq \infty$ en f een continue functie is op het gesloten interval $[a, b]$, dan convergeert de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ en is gelijk aan de klassieke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$.

3. We wijzen er op dat het voor convergentie van $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ noodzakelijk is dat beide limieten $\lim\limits_{p\to-\infty} \displaystyle\int_p^0 f(x)\,dx$ en $\lim\limits_{q\to\infty} \displaystyle\int_0^q f(x)\,dx$ bestaan en dat het *niet* voldoende is dat alleen
$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx \tag{60}$$
bestaat. Zo geldt $\lim\limits_{N\to\infty} \displaystyle\int_{-N}^{N} \frac{xdx}{x^2+1} = 0$, terwijl desondanks $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ divergent is omdat $\lim\limits_{q\to\infty} \displaystyle\int_0^q \frac{xdx}{x^2+1} = \lim\limits_{q\to\infty} [\frac{1}{2}\ln(q^2+1)] = \infty$ niet bestaat als reëel getal. ♡

♢ Voorbeelden

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ convergeert en heeft de waarde 1, omdat $\lim_{q\to\infty} \int_1^q \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{q\to\infty}[1 - \frac{1}{q}] = 1$. In plaats van "$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ convergeert en heeft de waarde 1" schrijven we kortweg $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

2. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ convergeert niet, omdat $\lim_{p\downarrow 0} \int_p^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{p\downarrow 0} \left[-1 + \frac{1}{p}\right]$ niet bestaat als reëel getal.

3. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ convergeert niet omdat $\lim_{q\to\infty} \int_1^q \frac{1}{x}\,dx = \lim_{q\to\infty}[\ln q - \ln 1]$ niet bestaat als reëel getal.

4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$, omdat $\lim_{p\downarrow 0} \int_p^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{p\downarrow 0}[2(1 - \sqrt{p})] = 2$.

Voor ieder positief reëel getal x beschikken we over $\ln x$. Daarmee kunnen we voor ieder reëel getal s definiëren
$$x^s := e^{s\ln x} \qquad \text{mits} \quad x > 0. \tag{61}$$
Deze definitie is zo dat voor alle $s, t, x \in \mathbb{R}$ met $x > 0$ geldt: $x^s \cdot x^t = x^{s+t}$.

♡ **Opmerking.** Het feit dat de natuurlijke logaritme de inverse functie is van de e-macht functie, komt neer op $x^1 = x$. Met induktie kan men vervolgens gemakkelijk inzien dat voor een positief geheel getal n ook bij de bovenstaande definitie x^n nog steeds het produkt is van n factoren x. Ook is, bijvoorbeeld, $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$ en dus is nog steeds $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. ♡

De voorgaande voorbeelden zijn allemaal speciale gevallen van het volgende

Lemma 3.2 *De oneigenlijke integraal $\int_1^\infty x^s\,dx$ convergeert voor $s < -1$ en divergeert voor $s \geq -1$. Als $s < -1$, dan is*

$$\int_1^\infty x^s\,dx = -\frac{1}{s+1}.$$

De oneigenlijke integraal $\int_0^1 x^s\,dx$ convergeert voor $s > -1$ en divergeert voor $s \leq -1$. Als $s > -1$, dan is

$$\int_0^1 x^s\,dx = \frac{1}{s+1}.$$

Bewijs: Voor alle $p, q \in (0, \infty)$ met $p < q$ is

$$\int_p^q x^s\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s+1}(q^{s+1} - p^{s+1}) & \text{als} \quad s \neq -1 \\ \ln q - \ln p & \text{als} \quad s = -1 \end{cases}$$

Voor de eerste uitspraak van het lemma nemen we $p = 1$ en de limiet voor $q \to \infty$. Voor de tweede uitspraak nemen we $q = 1$ en de limiet voor $p \downarrow 0$. □

Het onderstaande resultaat is een direkt gevolg van Lemma 3.2 dat in de praktijk zo vaak voorkomt dat we het apart vermelden.

Gevolg 3.3 *De oneigenlijke integraal $\int_0^1 \frac{dx}{x^\nu}$ convergeert voor $\nu < 1$ en divergeert voor $\nu \geq 1$. Als $\nu < 1$, dan is*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\nu} = \frac{1}{1-\nu}.$$

De oneigenlijke integraal $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\nu}$ convergeert voor $\nu > 1$ en divergeert voor $\nu \leq 1$. Als $\nu > 1$, dan is

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\nu} = \frac{1}{\nu-1}.$$

Bewijs: Neem in Lemma 3.2 $s = -\nu$. ■

3.2 Criteria voor convergentie

In paragraaf 3.1 konden we beslissen over convergentie van een oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ doordat we hulpintegralen zoals $\int_q^b f(x)\,dx$ expliciet konden berekenen. Expliciete berekening van integralen is echter zelden mogelijk. Zonder bewijs vermelden we nu enkele stellingen waarmee we desondanks kunnen beslissen over convergentie/divergentie van een groot aantal oneigenlijke integralen.

Stelling 3.4 *Zij f een continue reëelwaardige functie op (a, b) met de eigenschap $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Als er een positieve constante M is zo dat $\int_p^q f(x)\,dx \leq M$ voor alle $p, q \in (a, b)$ met $p < q$, dan convergeert $\int_a^b f(x)\,dx$.*

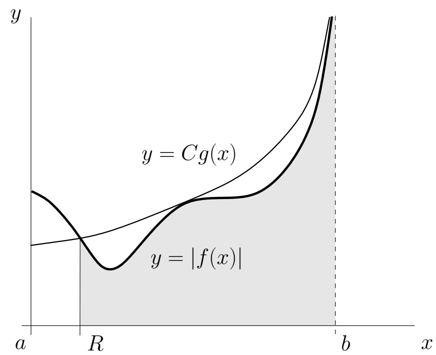
Stelling 3.5 *Zij f een continue reëelwaardige functie op (a, b). Als $\int_a^b |f(x)|\,dx$ convergeert, dan convergeert ook $\int_a^b f(x)\,dx$ en er geldt:*

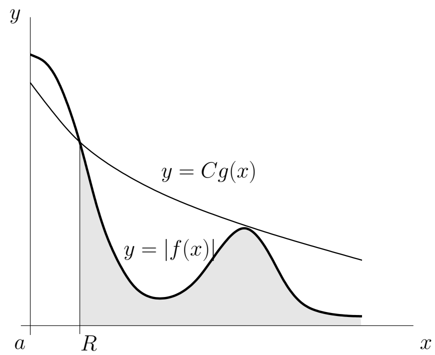
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Stelling 3.6 (Majorantie stelling) *Zij $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ een continue functie. Als $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ een continue functie is waarvoor*

- *$g(x) \geq 0$ en $|f(x)| \leq Cg(x)$ voor alle $x \in [R, b)$ met een $R \in [a, b)$ en $C > 0$;*
- *$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ convergeert.*

Dan convergeren $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ en $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ook.





We laten het aan de lezer over een soortgelijke stelling te formuleren voor oneigenlijke integralen van het type $\int_a^b f(x)\,dx$ waarbij f continu is op het half-open interval $(a,b]$.

♡ **Opmerking.** Zijn f en g twee functies gedefinieerd op $[a,b)$. Met

$$f(x) = \mathcal{O}\left(g(x)\right) \quad (x \uparrow b)$$

(spreek dit uit als f is grote 'oh' van g) bedoelen we dan dat er een $L < \infty$ bestaat zodat

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L.$$

Als $g(x) = \text{const}$, dan schrijven we $f(x) = O(1)$. Neem

$$\psi(x) := \frac{|f(x)|}{|g(x)|}\,.$$

Dan bestaan constanten $R \in [a,b)$ en $C > 0$ zo dat

$$\psi(x) \leq C \qquad \text{voor alle} \quad x \in [R,b)$$

ofwel

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \qquad \text{voor alle} \quad x \in [R,b).$$

♡

♢ **Voorbeelden**

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5+1}$ bestaat, want $0 \leq \frac{1}{x^5+1} \leq \frac{1}{x^5}$ en $\int_1^\infty \frac{dx}{x^5}$ bestaat.

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{2x\sqrt{x}-1}$ bestaat, want $\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}$ zodat $\frac{1}{2x\sqrt{x}-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ en $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ bestaat.

3. $\int_0^1 \frac{\sin x}{2x}\, dx$ bestaat, want $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$ en $\int_0^1 dx$ bestaat.

4. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$ bestaat, want $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$ en $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ bestaat.

5. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$ bestaat, want $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\sqrt{x} = 1$ en $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ bestaat.

6. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$ bestaat, als som van de vorige twee voorbeelden.

7. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ bestaat, want:

   $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$, waarin de eerste integraal convergeert, omdat $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ voor alle $x \in (0,1]$ en de oneigenlijke integraal $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ bestaat. Ook convergeert de tweede integraal, omdat $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \le e^{-x}$ voor alle $x \ge 1$ en de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{q\to\infty} [-e^{-x}]|_1^q = \frac{1}{e}$ bestaat ook.

8. $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$ divergeert, want:

   wanneer we dit splitsen in $\int_0^2$ en $\int_2^\infty$, dan blijkt dat de oneigenlijke integraal $\int_0^2 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$ wel bestaat – vanwege $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ – maar dat de oneigenlijke integraal $\int_2^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$ niet bestaat. Om dit laatste in te zien redeneren we als volgt:

   Eerst merken we op dat voor elke $x \ge 2$ geldt $\frac{\ln(x+1)}{x} \ge \frac{\ln 3}{x} > \frac{1}{x} > 0$. Als $\int_2^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$ zou convergeren, zou dus ook $\int_2^\infty \frac{1}{x}\, dx$ moeten convergeren. Echter we weten al dat $\int_2^\infty \frac{1}{x}\, dx$ niet convergeert. Daarom kan $\int_2^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$ ook niet convergeren.

9. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ convergeert, want:

   Uit $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ volgt dat $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ bestaat. De convergentie van $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ bewijzen we met behulp van partiële integratie:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^N \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^N - \int_{\frac{\pi}{2}}^N \frac{\cos x}{x^2}\, dx = -\frac{\cos N}{N} - \int_{\frac{\pi}{2}}^N \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Vanwege $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ en de convergentie van $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ convergeert ook $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$. We zien dat $\lim_{N\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{N} \frac{\sin x}{x}\, dx$ bestaat en gelijk is aan $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$. We concluderen dat $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ convergeert.

♡ **Opmerking.** Bij bovenstaande voorbeelden van oneigenlijke integralen hebben we alleen gekeken naar de convergentie. Berekening van de waarde is een heel andere kwestie. We bespreken hier een paar voorbeelden van zulke berekeningen.

Als een van de toepassingen van de *Fouriertransformatie* zullen we in paragraaf 4.4 zien dat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Dit integraal kan ook berekend worden met *differentiatie naar een parameter.* Zijn $\alpha, \beta > 0$. Definiëer de continu differentieerbare functie I door

$$I(\alpha,\beta) := \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x}\, dx\,.$$

We hebben

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx = e^{-\alpha x} \frac{-\alpha\cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\bigg|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

waaruit blijkt dat

$$I(\alpha,\beta) = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \mathrm{C}.$$

De constante C is gelijk aan nul want $I(\alpha,\beta) \to 0$ als $\beta \to 0$. Dus

$$I(\alpha,\beta) = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Neem hierin $\beta = 1$. Uit

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$$

volgt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\alpha\downarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Men kan iedere stap van deze formele berekeningen met enig subtiel schatten rechtvaardigen.

Soms leiden *substituties van variabelen* tot de oplossing. Om te bewijzen dat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ ,$$

merk ten eerste op dat de substitutie $\dfrac{1}{x} = t$ levert

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\, dt$$

Hieruit volgt dat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\, dx\ .$$

De substitutie $x + \dfrac{1}{x} = u$ in de laatste integraal geeft vervolgens

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ .$$

Voor sommige convergente oneigenlijke integralen kan de waarde effectief worden berekend met behulp van zogenaamde *contourintegralen* en de *Residuenstelling van Cauchy* uit de *Complexe Functie Theorie.* ♡

3.3 De Gamma-functie

De *Gamma-functie* is een klassieke speciale functie, die men op veel plaatsen in de wiskunde en natuurkunde tegenkomt. Bijvoorbeeld, wordt het volume van de n-dimensionale bol met straal R gegeven door

$$V_n = \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\ .$$

De Gamma-functie wordt gedefinieerd door de formule

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \qquad \text{voor} \quad s > 0. \tag{62}$$

Wil dit een zinnige definitie zijn, dan moet de oneigenlijke integraal in (62) convergeren. Dit wordt aangetoond in het volgende lemma.

Lemma 3.7 *De oneigenlijke integraal*

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx. \tag{63}$$

convergeert voor $s > 0$ en divergeert voor $s \leq 0$.

Bewijs: Eerst onderzoeken we $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$. Omdat $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\ln x = 0$ is, is er een getal $R > 0$ zo dat voor $x > R$ geldt $|(s-1)x^{-1}\ln x| < \frac{1}{2}$ en dus $0 < e^{-x}x^{s-1} = e^{-x+(s-1)\ln x} < e^{-\frac{1}{2}x}$. Omdat $\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$ convergeert, is volgens Stelling 3.6 ook $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ convergent. Dit geldt voor elke $s \in \mathbb{R}$.

Vervolgens onderzoeken we $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$. Omdat voor $0 \leq x \leq 1$ geldt $e^{-1}x^{s-1} \leq e^{-x}x^{s-1} \leq x^{s-1}$, leert Stelling 3.6 dat de oneigenlijke integraal $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ convergeert dan en slechts dan als $\int_0^1 x^{s-1}\,dx$ convergeert. Met Lemma 3.2 volgt nu dat de oneigenlijke integraal $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx$ convergeert voor $s > 0$ en divergeert voor $s \leq 0$.

Combinatie van bovenstaande deelresultaten leert dat de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ convergeert voor $s > 0$ en divergeert voor $s \leq 0$. $\square$

We bespreken nog een aantal belangrijke eigenschappen van de Γ-functie. Om te beginnen laten we zien:

Lemma 3.8 Γ *is een differentieerbare functie. Zijn afgeleide wordt gegeven door*

$$\Gamma'(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx \qquad \textit{voor} \ \ s > 0.$$

Bewijs: (Voor de liefhebber.) Eerst tonen we aan dat de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx$ convergeert als $s > 0$ is: Omdat voor $x \geq 1$ geldt $0 \leq \ln x \leq x$ en omdat volgens het vorige lemma $\int_1^\infty e^{-x}x^s\,dx$ convergeert, convergeert ook $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx$. Omdat

$$\lim_{x\downarrow 0}(e^{-x}x^{s-1}\ln x)x^{-(\frac{s}{2}-1)} = \lim_{x\downarrow 0} x^{\frac{s}{2}}\ln x = 0$$

en omdat $\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\,dx$ convergeert (zie Lemma 3.2), is ook $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx$ convergent. Bij elkaar geeft dit de convergentie van $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx$.

Om aan te tonen dat Γ differentieerbaar is en dat zijn afgeleide wordt gegeven door genoemde oneigenlijke integraal, volgen we de definitie van "differentieerbaar" en "afgeleide" en bekijken we

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}[\Gamma(s+h)-\Gamma(s)]-\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx=\\&=\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\left[e^{h\ln x}-1-h\ln x\right]\,dx.\end{aligned}$$

Nu herinneren we ons het begin van de Taylorontwikkeling [1] van de e-macht:

$$e^{h\ln x}=1+h\ln x+\frac{(h\ln x)^2}{2}e^{\xi}$$

met ξ tussen 0 en $h\ln x$. Bovendien weten we dat de e-macht een stijgende functie is en dat derhalve in geval $|h|<\frac{s}{2}$ geldt

$$0<e^{\xi}\leq e^{\max(0,h\ln x)}\leq e^{|h\ln x|}\leq e^{\frac{s}{2}|\ln x|}\leq\max(x^{\frac{s}{2}},x^{-\frac{s}{2}}).$$

Zo vinden we de schatting

$$0<e^{h\ln x}-1-h\ln x\leq\frac{(h\ln x)^2}{2}\max(x^{\frac{s}{2}},x^{-\frac{s}{2}}).$$

Dit levert ons vervolgens voor $0<|h|<\frac{s}{2}$:

$$\begin{aligned}0\;&<\;\frac{1}{h}[\Gamma(s+h)-\Gamma(s)]-\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\ln x\,dx\leq\\&\leq\;\frac{h}{2}\left[\int_0^1 e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}(\ln x)^2dx+\int_1^\infty e^{-x}x^{\frac{3s}{2}-1}(\ln x)^2dx\right].\end{aligned}$$

We laten het als een oefening voor de lezer om na te gaan dat de oneigenlijke integralen $\int_0^1 e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}(\ln x)^2dx$ en $\int_1^\infty e^{-x}x^{\frac{3s}{2}-1}(\ln x)^2dx$ inderdaad convergeren, bijvoorbeeld door ze te vergelijken met de convergente integralen $\int_0^1 x^{\frac{s}{3}-1}\,dx$ resp. $\int_1^\infty e^{-x}x^{2s-1}\,dx$.

[1] Ter herinnering:
Zij f een functie op een open interval I, die $(n+1)$ keer differentieerbaar is en waarvan de $(n+1)$-ste afgeleide $f^{(n+1)}$ continu is. Voor alle $a,x\in I$ is er dan een ξ tussen a en x zo dat

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Na deze oefening mag men de limiet voor $h \downarrow 0$ nemen. Dat levert:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}[\Gamma(s+h) - \Gamma(s)] = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \ln x \, dx.$$

Hiermee is het bewijs van Lemma 3.8 compleet. □

Het voorgaande lemma laat zien dat, wanneer we de Gamma-functie willen differentiëren, we dit mogen doen door in de integraal de integrand te differentiëren naar s. Inspektie van het bewijs laat zien dat we dit kunnen herhalen en zo ook de hogere afgeleiden van de Gamma-functie kunnen bepalen:

Lemma 3.9 *De Gamma-functie is willekeurig vaak differentieerbaar. Zijn n-de afgeleide wordt gegeven door*

$$\frac{d^n}{ds^n}\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^n \, dx \qquad \textit{voor} \;\; s > 0.$$

Uit de definitie formule (62) volgt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{q \to \infty} [1 - e^{-q}] = 1.$$

Verder ziet men door partiëel integreren dat voor alle $p, q \in (0, \infty)$ met $p < q$ geldt

$$\int_p^q e^{-x} x^s \, dx = \left[-e^{-x} x^s\right]_p^q + s \int_p^q e^{-x} x^{s-1} \, dx.$$

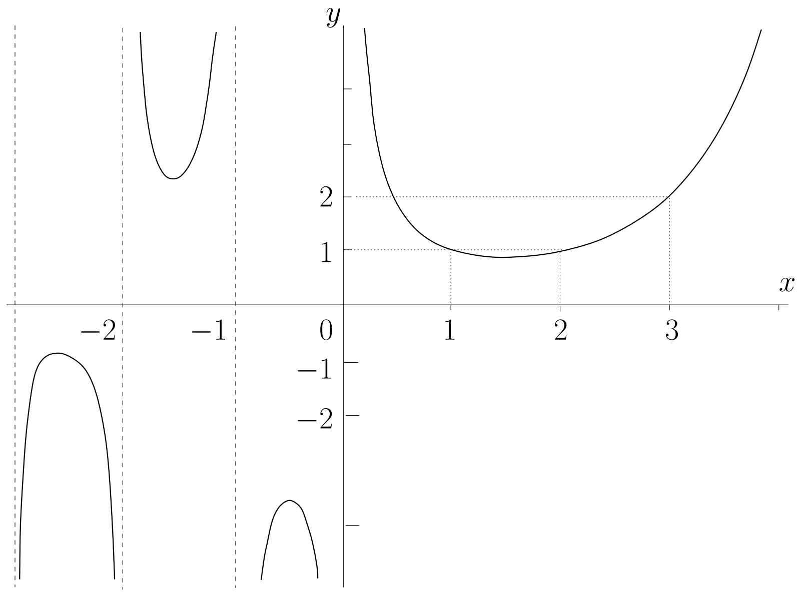
In de limiet voor $p \downarrow 0$ en $q \to \infty$ wordt dit

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{64}$$

Met induktie leidt men hieruit vervolgens af

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{voor elk positief geheel getal } n. \tag{65}$$

We zien: *De Gamma-functie, die is gedefinieerd op de hele positieve reële rechte* $(0, \infty)$*, is een* interpolatie *van de Faculteit-functie, die alleen gedefinieerd is voor positieve gehele getallen.* Bijvoorbeeld: $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, etc.



We geven nog enkele eigenschappen van de Gamma-functie.

Merk op dat de Γ-functie compleet gedefinieerd is door zijn waarden op het interval $[1, 2]$. Inderdaad, geeft de formule (64) de waarden van de Γ-functie op $[2, 3]$, die we kunnen gebruiken om de Γ-functie op $[3, 4]$ te definieren, etc. Met de volgende truc kan men nu het definitie gebied van de Γ-functie uitbreiden tot de verzameling

$$\{s \in \mathbb{R} \mid s \text{ niet een geheel getal } \leq 0\}.$$

We kunnen (64) herschrijven als

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}. \tag{66}$$

Deze formule laat ons de waarden van de Γ-functie op het interval $(0, 1)$ berekenen met die op $(1, 2)$. Met name, zien we dat $\Gamma(s) \to +\infty$ als $s \downarrow 0$. Het blijkt (zie opgave 9(a) in paragraaf 3.3) dat

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{67}$$

Met de waarden van de Γ-functie op $(0, 1)$, krijgen we met (66) zijn waarden op $(-1, 0)$, dan op $(-2, -1)$, etc. We hebben $\Gamma(s) \to -\infty$ als $s \uparrow 0$. In het algemeen, is de Γ-functie niet gedefiniëerd voor $s = -1, -2, \ldots$.

De Γ-functie kan herschreven worden als een integraal over een eindig interval:

Lemma 3.10

$$\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx \qquad \text{voor } s > 0.$$

Bewijs: De substitutie $x = e^{-y}$ geeft

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx = -\int_\infty^0 e^{-y} y^{s-1} dy = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy = \Gamma(s).$$

□

Er is een verband tussen de Gamma-functie en de *Béta-functie van Euler* die is gedefinieerd door de formule

$$\mathrm{B}(u, s) := \int_0^1 y^{u-1}(1-y)^{s-1} dy \qquad \text{voor } \; u, s > 0. \tag{68}$$

Ga zelf na dat $\mathrm{B}(u, s)$ goed gedefinieerd is en $\mathrm{B}(u, s) = \mathrm{B}(s, u)$.

Lemma 3.11

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s \, \mathrm{B}(n, s). \tag{69}$$

Bewijs: Het is bekend dat

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{e^{\varepsilon a} - 1}{\varepsilon} = a,$$

waaruit volgt dat voor $x > 0$ geldt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{e^{\varepsilon \ln x} - 1}{\varepsilon} = \ln x \, .$$

Dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x$$

ofwel

$$\ln \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} n \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right).$$

Met Lemma (3.10) zien we dat

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^{s-1} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^{s-1} dx.$$

De substitutie $x = y^n$ in de laatste integraal leidt tot (69). $\square$

Lemma 3.12

$$\mathrm{B}(n,s) = \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}. \tag{70}$$

Bewijs: (voor de liefhebber). Merk op dat $y^n = y^{n-1} - y^{n-1}(1-y)$. Dus

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(n,s) &= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{s-1}dy = \int_0^1 (1-y)^{s-1} d\left(\frac{y^n}{n}\right) \\
&= \left.\frac{y^n(1-y)^{s-1}}{n}\right|_0^1 + \frac{s-1}{n}\int_0^1 y^n(1-y)^{s-2}dy \\
&= \frac{s-1}{n}\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{s-2}dy - \frac{s-1}{n}\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{s-1}dy \\
&= \frac{s-1}{n}\mathrm{B}(n,s-1) - \frac{s-1}{n}\mathrm{B}(n,s)
\end{aligned}$$

zodat

$$\left(1 + \frac{s-1}{n}\right)\mathrm{B}(n,s) = \frac{s-1}{n}\mathrm{B}(n,s-1).$$

Dit geeft de volgende recurrente betrekking

$$\mathrm{B}(n,s) = \frac{s-1}{n+s-1}\mathrm{B}(n,s-1).$$

De symmetrie van de B-functie geeft

$$\mathrm{B}(n,s) = \frac{n-1}{s+n-1}\mathrm{B}(s,n-1)$$

waaruit (70) volgt. $\square$

De formule (69) impliceert nu dat

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}.$$

Wegens

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{s+n} = 1,$$

hebben we

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \lim_{n\to\infty} n^s \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{s+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^s \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)n}{s(s+1)\cdots(s+n-1)(s+n)}\end{aligned}$$

ofwel

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}. \tag{71}$$

Deze representatie van de Γ-functie gebruikt men om de volgende klassieke stelling te bewijzen.

Stelling 3.13 (Weierstrass)

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{s}{n}}}{\left(1+\frac{s}{n}\right)} \tag{72}$$

waarin $\gamma = 0.57721\ldots$ de constante van Euler is.

Bewijs: Merk op dat

$$\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \frac{n^s}{s\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)}$$

en

$$n^s = e^{s\ln n} = e^{s\left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)} = e^{s(\ln n - H_n)} e^s \cdot e^{\frac{s}{2}} \cdots e^{\frac{s}{n}}.$$

We hebben dus

$$\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} = e^{s(\ln n - H_n)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{\frac{s}{1}}}{\left(1+\frac{s}{1}\right)} \cdot \frac{e^{\frac{s}{2}}}{\left(1+\frac{s}{2}\right)} \cdots \frac{e^{\frac{s}{n}}}{\left(1+\frac{s}{n}\right)}$$

waarin

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

de n-de partiële som van de *harmonische reeks*. Er geldt (zie paragraaf 1.5)

$$\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = \gamma\,.$$

Dit geeft (72). ■

We weten al dat $\Gamma(1) = 1$. Met de formule van Weierstrass (72) kan men de afgeleide $\Gamma'(1)$ berekenen. Uit deze formule blijkt dat

$$\ln \Gamma(s) = -\gamma s - \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right].$$

Door de afgeleide te nemen krijgen we dan

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}\right) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n(s+n)}\,.$$

Voor $s = 1$ impliceert dit

$$\Gamma'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

waarin de bekende reeks staat met

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Dus $\Gamma'(1) = -\gamma$.

♡ **Opmerking.** De formule (72) geeft

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}$$

en

$$\frac{1}{\Gamma(-s)} = -se^{-\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right) e^{\frac{s}{n}}$$

waaruit blijkt dat

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} = -s^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Maar uit de formule (66) volgt dat

$$\Gamma(-s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{s}$$

en dus

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Men kan bewijzen dat

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.$$

Dit geeft de fraaie formule

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad \text{voor} \quad 0 < s < 1. \tag{73}$$

Een alternatief bewijs van deze formule gebruikt meerdimensionale oneigenlijke integralen en contourintegralen, waar we op dit moment niet op kunnen ingaan. Men kan (73) met $s = \frac{1}{2}$ gebruiken om $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ te berekenen. ♡

3.4 Opgaven

1. Bewijs dat voor elke $s > 0$ de integraal $\int_0^\infty e^{-st}dt$ convergent is en dat

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

2. Bewijs dat voor elke $s > 0$ en elk positief geheel getal n de integraal $\int_0^\infty t^n e^{-st}dt$ convergent is en dat

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

3. Ga na of de volgende integralen convergent zijn:

   (a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,dx$

   (b) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

   (c) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\,dx$

   (e) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,dx;$

   (f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$

4. Bewijs dat de volgende integralen convergent zijn:

   (a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx,$ voor elke reële a;

   (b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx,$ voor alle reële a en b;

   (c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx,$ voor alle reële a met $0 < a < 1$.

5. Bewijs dat, voor elk natuurlijk getal n, de integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad \text{en} \quad \int_0^1 (\ln x)^n\,dx$$

   bestaan. Bereken de waarden voor $n = 2$.

6. Ga na of de integralen

$$\int_0^{\infty} e^{-x^3}\,dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^3}\,dx$$

   convergent zijn.

7. Bewijs dat de integralen van Fresnel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$$

   convergeren (substitueer $x^2 = y$).

8. Bewijs dat voor $s > 0$ en $c \in \mathbb{R}$ de integralen $\int_0^\infty e^{-st} \sin(ct)\, dt$ en $\int_0^\infty e^{-st} \cos(ct)\, dt$ convergeren en dat

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin(ct)\, dt = \frac{c}{s^2 + c^2} \qquad \text{en} \qquad \int_0^\infty e^{-st} \cos(ct)\, dt = \frac{s}{s^2 + c^2}$$

9. Ga na dat

   (a) $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$

   (b) $\int_0^\infty e^{-x^3}\, dx = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$

10. Bewijs dat voor $s > 0$ en $p > 0$ de integraal $\int_0^\infty t^p e^{-st} dt$ convergeert en dat

$$\int_0^\infty t^p e^{-st} dt = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}.$$

11. Bereken, in termen van de Γ-functie $\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\, dx$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

4 De Fouriertransformatie

De Fourierreeksen laten ons 'nette' T-periodieke functies representeren als lineaire combinaties van basis-functies $x \mapsto e^{in\omega x}$ met $n \in \mathbb{Z}$ en $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een tweemaal continu differentieerbare functie die voldoet aan $f(x+T) = f(x)$ voor een $T > 0$ en iedere $x \in \mathbb{R}$. Dan

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{in\omega x} \tag{74}$$

waarin

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \ .$$

In vele toepassingen wil men ook niet-periodieke functies schrijven als lineaire combinaties van exponenten $x \mapsto e^{isx}$ met $s \in \mathbb{R}$. Om een idee te krijgen hoe dat kan, zullen we een *formele limietovergang* $T \to \infty$ in de bovenstaande formules maken.

Definieer $s_n = \omega n$ en $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = \omega$. Dan kunnen we $\widehat{f}_n$ herschrijven als

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-is_n t} dt \right) \Delta s_n$$

en wordt (74)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-is_n t} dt \right) e^{is_n x} \Delta s_n \, .$$

Als we hierin de limit $T \to \infty$ nemen, dan $\Delta s_n = \omega \to 0$ zodat we de som over n als een integraal-som kunnen interpreteren en formeel schrijven

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \right) e^{isx} ds \, .$$

Zij

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \, ,$$

dan is

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{isx} ds \, ,$$

de beoogde lineaire combinatie van e-machten.

We doen nu geen enkele poging om deze intuïtieve limietovergang te rechtvaardigen. In plaats daarvan, zullen we eerst oneigenlijke integralen van de vorm

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)\, dt \tag{75}$$

bestuderen. Daarna zullen we zien onder welke voorwaarden een functie f uit deze integraal kan worden gereconstrueerd.

4.1 Oneigenlijke integralen voor functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Definitie 4.1 *Voor een open interval (a, b), mogelijk met $a = -\infty$ en/of $b = \infty$, en een continue functie $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ zeggen we dat de* oneigenlijke integraal $\int_a^b f(t)dt$ convergeert *(of* bestaat*) als beide limieten* $\lim_{p\downarrow a} \int_p^c f(t)dt$ *en* $\lim_{q\uparrow b} \int_c^q f(t)dt$ *bestaan voor een $c \in (a, b)$. In geval van convergentie definiëren we*

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{p\downarrow a} \int_p^c f(t)dt + \lim_{q\uparrow b} \int_c^q f(t)dt.$$

Merk op dat de integralen $\int_p^c f(t)dt$ en $\int_c^q f(t)dt$ zijn bepaald volgens Definitie 2.3. Wanneer $f : [p, q] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu is, kunnen we deze integralen definiëren met formule (17).

Definitie 4.2 *Men zegt dat een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$* stuksgewijs continu *is als voor alle $p, q \in \mathbb{R}$, met $p < q$, de functie f op het gesloten interval $[p, q]$ stuksgewijs continu is.*

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie. Volgens Definitie 4.1 *convergeert* (of *bestaat*) de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ als beide limieten $\lim_{q\to\infty} \int_0^q f(t)dt$ en $\lim_{p\to-\infty} \int_p^0 f(t)dt$ bestaan. Als die oneigenlijke integraal convergeert kennen we er een getalwaarde aan toe, namelijk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt := \lim_{p\to-\infty} \int_p^0 f(t)dt + \lim_{q\to\infty} \int_0^q f(t)dt.$$

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Zij $\lambda = \alpha + i\omega$ een complex getal met $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$. Volgens Definitie 4.1,

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} dt = \lim_{q\to\infty} \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right]_0^q = \lim_{q\to\infty} \frac{e^{\alpha q} e^{i\omega q}}{\alpha + i\omega} - \frac{1}{\lambda}\,.$$

We hebben

$$\left|\frac{e^{\alpha q} e^{i\omega q}}{\alpha + i\omega}\right| = \frac{e^{\alpha q}}{|\alpha + i\omega|} = \frac{e^{\alpha q}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}\,.$$

Hieruit volgt dat

$$\lim_{q\to\infty} \frac{e^{\alpha q} e^{i\omega q}}{\alpha + i\omega}$$

bestaat als $\alpha < 0$ en dan gelijk is aan 0. Als $\alpha > 0$ dan $e^{\alpha q} \to \infty$ voor $q \to \infty$ en de limiet bestaat niet. Deze limiet bestaat ook niet als $\alpha = 0$ want

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

is periodiek en heeft dus geen limiet.

De conclusie is:

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} \quad \text{mits} \quad \operatorname{Re} \lambda < 0. \tag{76}$$

$\diamondsuit$

Definitie 4.3 *Voor een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieert men de functie $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door*

$$|f|(t) := |f(t)| \quad \textit{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Als f stuksgewijs continu is, is $|f|$ dat ook. Men zegt dan dat de functie f absoluut integreerbaar *is en dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$* absoluut convergeert *als de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|dt$ convergeert.*

Vanwege

$$|\operatorname{Re} f(t)|\,,\ |\operatorname{Im} f(t)| \ \le\ |f(t)| \ \le\ |\operatorname{Re} f(t)| + |\operatorname{Im} f(t)|$$

geldt

$$f \text{ absoluut integreerbaar} \iff \operatorname{Re} f\,,\ \operatorname{Im} f \text{ beide absoluut integreerbaar} \tag{77}$$

Verder kan men gemakkelijk inzien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \quad \text{absoluut convergent} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \quad \text{convergent.} \tag{78}$$

In dit geval geldt

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\,.$$

4.2 Fouriertransformatie: definitie en eigenschappen

Bij de Fouriertransformatie bestuderen we oneigenlijke integralen van de vorm

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt.$$

Daarbij is s een reële variabele en is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een complex-waardige functie van een andere reële variabele t. Voordat we hier iets mee kunnen doen, zullen we eventuele convergentieproblemen moeten oplossen.

Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie is. Dan convergeert de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$. Vanwege

$$|e^{-ist} f(t)| = |f(t)| \qquad \text{voor alle } s, t$$

volgt hieruit dan ook de (absolute) convergentie van de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt$$

voor elke $s \in \mathbb{R}$.

Bij gegeven functie f is $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt$ een functie van s, die men gewoonlijk noteert als $\mathcal{F}f$ of $\widehat{f}$; dus

$$(\mathcal{F}f)(s) := \widehat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt. \tag{79}$$

Men noemt $\widehat{f}$ de *Fouriergetransformeerde van* f. Het voorschrift $\mathcal{F}$ dat aan de functie f (van de variabele t) de functie $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ (van de variabele s) toevoegt noemt men de *Fouriertransformatie*.

♡ **Opmerking.** Bij de definitie van de Fouriertransformatie zijn in de literatuur verschillende normalisaties in gebruik. Zo worden ook de volgende integralen aangeduid als de Fouriergetransformeerde van f

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ist} f(t)dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt.$$

Dergelijke verschillende keuzes van normalisatie beïnvloeden de essentiële eigenschappen van de Fouriertransformatie niet, maar kunnen zich in sommige formules manifesteren d.m.v. factoren 2π of $\sqrt{2\pi}$. Wanneer men op dit verschijnsel bedacht is en bij het raadplegen van een boek even opzoekt welke normalisatie wordt gebruikt, zal men er weinig last van hebben. ♡

◇ **Voorbeelden**

1. Zij $\mu = \alpha + i\beta$ een complex getal met reëel deel $\alpha < 0$. Bekijk daarbij de functie f_μ gegeven door

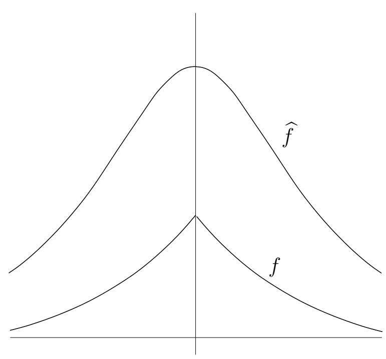
$$f_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t < 0, \\ e^{\mu t} & \text{als} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Dan is (met formule (76))

$$(\mathcal{F} f_\mu)(s) = \int_0^{\infty} e^{(\mu - is)t} dt = \frac{1}{is - \mu}. \tag{80}$$

2. Neem $a > 0$ en beschouw de functie

$$f(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{at} & \text{als} \quad t < 0, \\ e^{-at} & \text{als} \quad t \geq 0. \end{cases}$$



Dan is

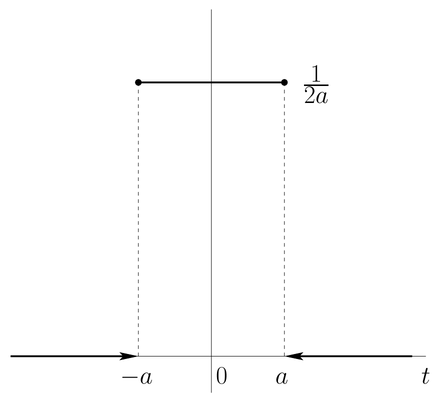
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} &= \int_{-\infty}^{0} e^{-ist}e^{at}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-ist}e^{-at}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{(is-a)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(is+a)t}dt \\ &= \frac{1}{a-is} + \frac{1}{a+is} = \frac{2a}{a^2+s^2}\,.\end{aligned}$$

Dus

$$\widehat{f}(s) = \frac{2a}{a^2+s^2}\,.$$

3. Definieer voor $a > 0$ de functie f_a door

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als} \quad |t| \le a, \\ 0 & \text{als} \quad |t| > a. \end{cases}$$



f_a is een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie. We berekenen zijn Fouriergetransformeerde $\widehat{f_a}$:
voor $s \neq 0$ is

$$\widehat{f_a}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f_a(t)dt = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-ist}dt = \left[\frac{e^{-ist}}{-2ias}\right]_{t=-a}^{t=a} = \frac{\sin as}{as}\,;$$

voor $s = 0$ is

$$\widehat{f_a}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)dt = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} dt = 1.$$

Merk op dat deze $\widehat{f_a}$ een continue functie is; vgl. Stelling 4.4.

Een opmerking, waarvan de relevantie zal blijken bij de behandeling van de *Dirac δ-functie*, is:

$$\lim_{a\downarrow 0}\widehat{f_a}(s)=1 \qquad \text{voor elke} \quad s\in\mathbb{R}, \tag{81}$$

terwijl anderzijds

$$\lim_{a\downarrow 0} f_a(0)=\infty \qquad \text{en} \qquad \lim_{a\downarrow 0} f_a(t)=0 \qquad \text{voor elke} \quad t\neq 0. \tag{82}$$

We zien dat voor $a\downarrow 0$ de functies $\widehat{f_a}$ keurig naar een limiet functie gaan (de constante functie 1), maar dat de functies f_a niet naar een (overal gedefinieerde) limiet functie gaan. $\diamondsuit$

De verzameling van alle stuksgewijs continue en absoluut integreerbare complex-waardige functies op $\mathbb{R}$ is een complexe lineaire ruimte, waarbij de lineaire combinatie $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$, voor functies f_1, f_2 en scalairen $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, wordt gedefinieerd door

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(t):=\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t) \qquad \text{voor} \quad t\in\mathbb{R}.$$

De Fouriertransformatie is dan duidelijk een *lineaire transformatie*, d.w.z.:

$$\mathcal{F}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1\mathcal{F}f_1+\lambda_2\mathcal{F}f_2.$$

In het bijzonder geldt voor elke stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$\mathcal{F}f=\mathcal{F}(\operatorname{Re} f)+i\mathcal{F}(\operatorname{Im} f). \tag{83}$$

Stelling 4.4 *De Fouriertransformatie is een lineaire afbeelding*

$$\mathcal{F}\ :\ \left\{\begin{array}{c}\textit{stuksgewijs continue,}\\ \textit{absoluut integreerbare}\\ \textit{functies}\ \ f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\end{array}\right\}\longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\textit{continue functies}\\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ \ \textit{zodat}\\ \lim\limits_{s\to\pm\infty} g(s)=0\end{array}\right\}$$

$$(\mathcal{F}f)(s):=\widehat{f}(s):=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}f(t)dt.$$

Bewijs: (voor de liefhebber) Na de discussie voorafgaand aan de stelling blijft hier alleen nog te bewijzen dat bij een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie f de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$ een continue functie is van s en dat $\lim_{s\to\infty} \widehat{f}(s) = 0$ en $\lim_{s\to-\infty} \widehat{f}(s) = 0$.

Iedere complex-waardige functie splitst in een reëel en een imaginair deel. Daarbij splitst, volgens formule (83), ook de Fouriergetransformeerde in de Fouriergetransformeerden van de reële en imaginaire delen. Daarom is het voldoende de stelling alleen voor reëel-waardige functies te bewijzen. Bij de formulering van de rest van het bewijs zullen we aannemen dat f een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is.

Bewijs van de continuïteit van $\widehat{f}$. We moeten laten zien:

$$\begin{array}{l}\text{voor iedere } s\in\mathbb{R} \ \text{ en voor iedere } \ \epsilon>0 \text{ is er een } \ \delta>0 \ \text{ zodat:}\\ \qquad \text{als} \quad |h|<\delta \quad \text{dan} \quad |\widehat{f}(s+h)-\widehat{f}(s)|<\epsilon\end{array} \tag{84}$$

Laat $s\in\mathbb{R}$ en $\epsilon>0$ gegeven zijn. We gaan op zoek naar een δ waarvoor de uitspraak (84) geldt. Pas in formule (86) zullen we die δ vinden.

Omdat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$ convergeert, is er een $R>0$ zodat

$$\int_{-\infty}^{-R}|f(t)|dt < \frac{\epsilon}{6} \qquad \text{en} \qquad \int_{R}^{\infty}|f(t)|dt < \frac{\epsilon}{6}.$$

Neem zo'n R en schrijf

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s+h)-\widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s+h)t}f(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}\right)f(t)dt\\ &= \int_{-\infty}^{-R}\left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}\right)f(t)dt + \\ &\quad \int_{-R}^{R}\left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}\right)f(t)dt + \\ &\quad \int_{R}^{\infty}\left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}\right)f(t)dt\,.\end{aligned}$$

Er geldt

$$\left|e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}\right| \le \left|e^{-i(s+h)t}\right| + \left|e^{-ist}\right| = 2.$$

Dus is

$$|\widehat{f}(s+h) - \widehat{f}(s)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + \left| \int_{-R}^{R} \left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist} \right) f(t) dt \right| . \tag{85}$$

Dan merken we op dat

$$e^{-i(s+h)t} - e^{-ist} = e^{-ist} e^{-\frac{iht}{2}} \left(e^{-\frac{iht}{2}} - e^{\frac{iht}{2}} \right) = -2ie^{-i\left(s+\frac{h}{2}\right)t} \sin\left(\frac{ht}{2}\right)$$

en dat $|\sin x| \leq |x|$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt

$$\left| e^{-i(s+h)t} \; - \; e^{-ist} \right| \leq |h||t| \quad \text{voor alle} \;\; t, h \in \mathbb{R} \, .$$

Dus

$$\left| \int_{-R}^{R} \left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist} \right) f(t) dt \right| \leq \int_{-R}^{R} |h||tf(t)| \, dt \leq |h| R \int_{-R}^{R} |f(t)| \, dt \leq |h| RC$$

met

$$C = \int_{-R}^{R} |f(t)| \, dt$$

Wanneer we nu nemen

$$\delta = \frac{\epsilon}{3RC} \tag{86}$$

dan geldt voor $|h| < \delta$

$$\left| \int_{-R}^{R} \left(e^{-i(s+h)t} - e^{-ist} \right) f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Gecombineerd met (85) bewijst dit uitspraak (84):

$$\text{Als} \quad |h| < \delta \quad \text{dan} \quad |\widehat{f}(s+h) - \widehat{f}(s)| < \epsilon.$$

Hiermee is het bewijs voor de continuïteit van de functie $\widehat{f}$ geleverd.

Bewijs van $\lim_{s\to\infty} \widehat{f}(s) = 0$ **en** $\lim_{s\to-\infty} \widehat{f}(s) = 0$.
Voor de eerste van deze twee limieten moeten we laten zien:

$$\begin{array}{l} \text{voor iedere } \; \epsilon > 0 \text{ is er een } \; N > 0 \; \text{ zodat} \\ \text{voor elke } \; s > N \; \text{ geldt } |\widehat{f}(s)| < \epsilon. \end{array} \tag{87}$$

Laat $\epsilon > 0$ gegeven zijn. We zoeken een N waarvoor de uitspraak (87) geldt. We hebben

$$|\widehat{f}(s)| \leq \int_{-\infty}^{-R} |f(t)|dt + \left|\int_{-R}^{R} e^{-ist} f(t)dt\right| + \int_{R}^{-\infty} |f(t)|dt\,.$$

Omdat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ convergeert, is er een $R > 0$ zodat

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(t)|dt + \int_{R}^{-\infty} |f(t)|dt < \frac{\epsilon}{3}\,.$$

Neem zo'n R. Dan zien we, net als in het bewijs voor de continuïteit,

$$|\widehat{f}(s)| \;<\; \frac{\epsilon}{3} + \left|\int_{-R}^{R} e^{-ist} f(t)dt\right| \qquad \text{voor elke} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{88}$$

We nemen nu een *stuksgewijs constante* functie $\varphi : [-R, R] \to \mathbb{R}$ zo dat

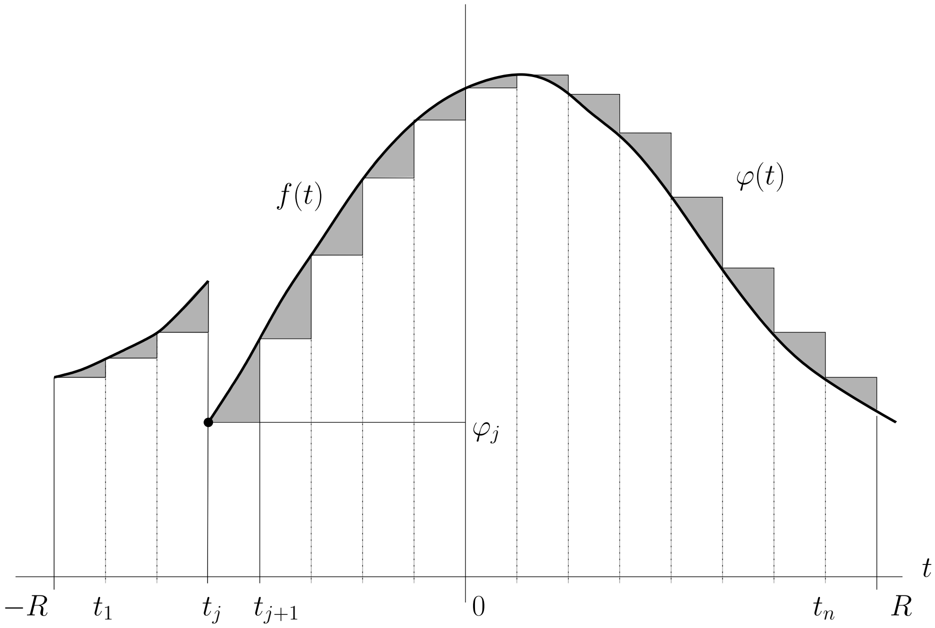
$$\varphi(t) = f(t_j^+) \qquad \text{voor} \;\; t \in [t_j, t_{j+1})$$

en $\varphi(t_{n+1}) = \varphi(t_n)$. Hierin zijn $-R = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1} = R$ de discontinuïteitspunten van φ. Als n voldoende groot is en alle $|t_{j+1} - t_j|$ klein genoeg zijn, dan

$$\int_{-R}^{R} |f(t) - \varphi(t)|dt \;<\; \frac{\epsilon}{3}$$

(zie figuur). Dan is

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-R}^{R} e^{-ist} f(t)dt\right| \;&\leq\; \left|\int_{-R}^{R} e^{-ist}(f(t) - \varphi(t))dt\right| + \left|\int_{-R}^{R} e^{-ist}\varphi(t)dt\right| \\
&\leq\; \int_{-R}^{R} |f(t) - \varphi(t)|dt + \left|\int_{-R}^{R} e^{-ist}\varphi(t)dt\right| \\
&<\; \frac{\epsilon}{3} + \left|\int_{-R}^{R} e^{-ist}\varphi(t)dt\right|.
\end{aligned} \tag{89}$$



Definiëer

$$\omega_j = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \qquad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dan is voor $s > 0$:

$$\left| \int_{-R}^{R} e^{-ist} \varphi(t) dt \right| = \left| \frac{1}{-is} \left[\varphi(R) e^{-isR} - \sum_{j=1}^{n} \omega_j e^{-ist_j} - \varphi(-R) e^{isR} \right] \right| \leq \frac{C}{s}$$

met

$$C = |\varphi(R)| + \sum_{j=1}^{n} |\omega_j| + |\varphi(-R)|.$$

We zien dat als we $s > \frac{3C}{\epsilon}$ nemen, dan is

$$\left| \int_{-R}^{R} e^{-ist} \varphi(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{90}$$

Door (88), (89) en (90) te combineren zien we dat met $N = \frac{3C}{\epsilon}$ voldaan is aan uitspraak (87):

$$\text{voor elke } \; s > N \; \text{ geldt } |\widehat{f}(s)| < \epsilon.$$

Hiermee is bewezen $\lim_{s\to\infty} \widehat{f}(s) = 0$. Op precies dezelfde manier bewijst men $\lim_{s\to-\infty} \widehat{f}(s) = 0$. ■

Stelling 4.4 zegt niets over de differentieerbaarheid van de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$ (met betrekking tot de variabele s), en terecht, want die differentieerbaarheid van $\widehat{f}$ wordt alleen maar verkregen onder extra voorwaarden op f; zie Gevolg 4.7 hieronder.

Lemma 4.5 *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn. Veronderstel dat de functie $tf(t)$ absoluut integreerbaar is. Dan is ook de functie f zelf absoluut integreerbaar.*

Bewijs: Dit volgt uit de majorantie stelling en het feit dat voor $|t| > 1$ geldt $|f(t)| \leq |tf(t)|$. □

Wanneer men na het zien van de definitie

$$(\mathcal{F}f)(s) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt$$

de functie $\mathcal{F}f$ naar s wil differentiëren, is de voor de hand liggende gedachte om maar gewoon de integrand in het rechterlid *naar s te differentiëren*. De volgende stelling zegt dat dit onder de juiste voorwaarde (nl. $tf(t)$ moet absoluut integreerbaar zijn) inderdaad correct is.

Stelling 4.6 *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn zo dat de functie $tf(t)$ absoluut integreerbaar is. Dan is de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f$ een differentieerbare functie van s. De afgeleide is:*

$$(\mathcal{F}f)'(s) \;=\; -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} tf(t)dt \;=\; -i(\mathcal{F}(tf))(s). \qquad (91)$$

Bewijs: (hints voor de echte liefhebber) Voor alle reële getallen s, t en h ziet men net als in het bewijs van Stelling 4.4

$$|e^{-i(s+h)t} - e^{-ist}| \leq |h||t|.$$

Laat nu $\epsilon > 0$ gegeven zijn. Omdat $tf(t)$ absoluut integreerbaar is, is er dan een getal $R > 0$ zodat

$$\int_R^\infty |tf(t)|dt < \frac{\epsilon}{4} \qquad \text{en} \qquad \int_{-\infty}^{-R} |tf(t)|dt < \frac{\epsilon}{4}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}f)(s+h) - (\mathcal{F}f)(s) + ih(\mathcal{F}(tf))(s)| &= \\ &= \left|\int_{-\infty}^\infty (e^{-i(s+h)t} - e^{-ist} + ihe^{-ist}t)f(t)dt\right| \\ &\leq |h|\epsilon + \left|\int_{-R}^R e^{-ist}(e^{-iht} - 1 + iht)f(t)dt\right|. \end{aligned}$$

Verder is

$$|e^{-iht} - 1 + iht| = \left|\sum_{n\geq 2} \frac{(iht)^n}{n!}\right| \leq |h|^2|t|^2 \sum_{n\geq 0} \frac{|ht|^n}{(n+2)!} \leq |h|^2|t|^2 e^{|ht|}.$$

Vullen we dit in in de eerdere afschatting dan blijkt

$$|\mathcal{F}f(s+h) - \mathcal{F}f(s) + ih(\mathcal{F}(tf))(s)| \leq |h|\epsilon + |h|^2 e^{|h|R} \int_{-R}^R |t^2 f(t)|dt$$

Delen we door $|h|$ en nemen we vervolgens de limiet voor $h \to 0$ dan zien we

$$\left|\lim_{h\to 0} \frac{(\mathcal{F}f)(s+h) - (\mathcal{F}f)(s)}{h} + i(\mathcal{F}(tf))(s)\right| \leq \epsilon$$

Nu laten we $\epsilon \downarrow 0$ gaan. Dat levert dan precies wat we wilden bewijzen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\mathcal{F}f)(s+h) - (\mathcal{F}f)(s)}{h} = -i(\mathcal{F}(tf))(s).$$

$\blacksquare$

Vervolgens kan men (in casu, iedereen) uit Stelling 4.6 met induktie afleiden

Gevolg 4.7 *Zij n een gegeven positief geheel getal. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn zo dat de functie $t^n f(t)$ absoluut integreerbaar is. Dan is de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f$ een n keer differentieerbare functie van s. De n-de afgeleide is:*

$$(\mathcal{F}f)^{(n)}(s) \;=\; (-i)^n(\mathcal{F}(t^n f))(s). \tag{92}$$

Stelling 4.8 *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een absoluut integreerbare en stuksgewijs continu differentieerbare functie zijn, die bovendien continu is en voldoet aan*

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0 \qquad \text{en} \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Dan convergeert de oneigenlijke integraal $(\mathcal{F}(f'))(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f'(t)dt$ voor elke $s \in \mathbb{R}$ en er geldt

$$(\mathcal{F}(f'))(s) = is(\mathcal{F}f)(s) \tag{93}$$

Bewijs: Voor alle reële getallen q, p met $q < p$ ziet men door partieel integreren

$$\int_q^p e^{-ist} f'(t)dt = e^{-isp} f(p) - e^{-isq} f(q) + is \int_q^p e^{-ist} f(t)dt.$$

Dus

$$\left| \int_q^p e^{-ist} f'(t)dt - is \int_q^p e^{-ist} f(t)dt \right| \leq |f(p)| + |f(q)|.$$

Het gewenste resultaat volgt nu door de limieten voor $p \to \infty$ en $q \to -\infty$ te nemen. ■

♡ **Opmerking.** We hebben in de voorgaande stelling geen uitspraak gedaan over het al dan niet absoluut integreerbaar zijn van de afgeleide functie f'. Laat f een continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie zijn, waarvoor f *en* f' absoluut integreerbaar zijn. Dan $f(t) \to 0$ als $t \to \pm\infty$. Inderdaad, in dit geval kunnen we schrijven

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds\ .$$

Hieruit volgt dat $f(t)$ limieten heeft als $t \to \pm\infty$, omdat f' (absoluut) integreerbaar is. Deze limieten moeten beide gelijk aan nul zijn, anders is de functie f niet absoluut integreerbaar. ♡

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Als toepassing van de voorgaande stellingen bepalen we de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$ van de functie $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$. De functie f voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'(t) = -tf(t) \qquad \text{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

De Fouriergetransformeerde van het linkerlid is volgens Stelling 4.8

$$(\mathcal{F}(f'))(s) = is(\mathcal{F}f)(s).$$

De Fouriergetransformeerde van het rechterlid is volgens Stelling 4.6

$$(\mathcal{F}(-tf))(s) = -i(\mathcal{F}f)'(s).$$

De functie $\mathcal{F}f$ voldoet dus blijkbaar aan de differentiaalvergelijking (waarbij wordt gedifferentieerd naar s)

$$(\mathcal{F}f)'(s) = -s(\mathcal{F}f)(s) \qquad \text{voor alle} \quad s \in \mathbb{R}.$$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn allemaal van de vorm constante $\times\, e^{-\frac{1}{2}s^2}$. In het bijzonder is

$$(\mathcal{F}f)(s) = (\mathcal{F}f)(0) \times e^{-\frac{1}{2}s^2}.$$

De volgende integraal is een heel bekende:

$$(\mathcal{F}f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Conclusie:

$$(\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}t^2}))(s) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}s^2}.$$

We zien dus dat f de *eigenfunctie* is van de Fouriertransformatie met *eigenwaarde* $\lambda = \sqrt{2\pi}$: $\mathcal{F}f = \lambda f$. $\diamondsuit$

De generalisatie van Stellingen 4.8 voor de Fouriergetransformeerde van hogere afgeleiden is:

Stelling 4.9 *Zij r een geheel getal, $r \geq 1$. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een r keer stuksgewijs continu differentieerbare functie. Laat bovendien gegeven zijn* *dat de functies f, f',... $f^{(r-1)}$ allemaal continu en absoluut integreerbaar zijn en dat bovendien:*

$$\lim_{t\to-\infty} f^{(n)}(t) = 0 \qquad \text{en} \qquad \lim_{t\to\infty} f^{(n)}(t) = 0 \qquad \text{voor} \quad n = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Dan is ook de integraal $(\mathcal{F}f^{(r)})(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f^{(r)}(t)dt$ *convergent voor elke* $s \in \mathbb{R}$*, en er geldt*

$$(\mathcal{F}f^{(r)})(s) = (is)^r \mathcal{F}f(s). \tag{94}$$

Bewijs: Dit volgt met induktie uit Stelling 4.8. De induktie begint met het triviale geval $r = 0$. Voor de induktiestap nemen we $r \geq 1$ en merken we eerst op dat, de functie $f^{(r-1)}$ voldoet aan de voorwaarden van Stelling 4.8 en dat daarom

$$(\mathcal{F}f^{(r)})(s) = is\mathcal{F}(f^{(r-1)})(s).$$

Als $(\mathcal{F}f^{(r-1)})(s) = (is)^{r-1}\mathcal{F}f(s)$ is, dan is dus $(\mathcal{F}f^{(r)})(s) = (is)^r\mathcal{F}f(s)$. ■

Stelling 4.10 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *een absoluut integreerbare en stuksgewijs continue functie. Laat verder* $c \in \mathbb{R}$ *gegeven zijn. Dan is*

$$(\mathcal{F}(e^{ict}f))(s) = (\mathcal{F}f)(s-c) \qquad \text{voor alle} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{95}$$

Bewijs: $$(\mathcal{F}(e^{ict}f))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}e^{ict}f(t)dt = (\mathcal{F}f)(s-c).$$ ■

Neem een absoluut integreerbare en stuksgewijs continue functie f en definieer $g(t) = f(t)\cos(\omega t)$. Dan impliceert Stelling 4.10 dat

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{2}\left[\widehat{f}(s+\omega) + \widehat{f}(s-\omega)\right].$$

Stelling 4.11 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *een absoluut integreerbare en stuksgewijs continue functie. Laat verder* $c \in \mathbb{R}$ *gegeven zijn. Definieer de functie* $f_{(c)} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *door*

$$f_{(c)}(t) := f(t+c) \quad \text{voor} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dan is ook $f_{(c)}$ *een absoluut integreerbare en stuksgewijs continue functie en is er het volgende verband tussen de Fouriergetransformeerden van de functies* f *en* $f_{(c)}$*:*

$$(\mathcal{F}f_{(c)})(s) = e^{ics}(\mathcal{F}f)(s) \qquad \text{voor alle} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{96}$$

Bewijs:

$$(\mathcal{F}f_{(c)})(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t+c)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(t-c)} f(t)dt = e^{ics}(\mathcal{F}f)(s)$$

■

Merk op dat voor een differentieerbare functie f

$$\frac{1}{h}[f(t+h) - f(t)] \to f'(t) \quad \text{als} \quad h \to 0.$$

Maar dan

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{h}[f(t+h) - f(t)]\right)(s) = \frac{1}{h}\left[e^{ihs}\widehat{f}(s) - \widehat{f}(s)\right] = \frac{e^{ihs}-1}{h}\widehat{f}(s) \to is\widehat{f}(s),$$

in overeensteming met Stelling 4.8.

♢ **Voorbeeld.** Beschouw de functie

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2+t}.$$

Er geldt dat $f(t) = \sqrt{e}\, f_0(t-1)$ met

$$f_0(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

We kunnen dan de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$ op twee manieren berekenen.

Methode I. Volgens Stelling 4.11,

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{e}\left(\mathcal{F}(f_0)_{(-1)}\right)(s) = \sqrt{e}e^{-is}\widehat{f}_0(s) = \sqrt{2\pi e} \;\; e^{-\frac{1}{2}s^2-is}.$$

Methode II. De functie f voldoet aan de differntiaalvergelijking

$$f'(t) = -tf(t) + f(t).$$

Met Stellingen 4.8 en 4.6 is de Fouriergetransformeerde van deze vergelijking

$$is(\mathcal{F}f)(s) = -i(\mathcal{F}f)'(s) + (\mathcal{F}f)(s).$$

De functie $\mathcal{F}f$ voldoet dus aan de differentiaalvergelijking

$$(\mathcal{F}f)'(s) = (-s-i)(\mathcal{F}f)(s)$$

waaruit volgt dat

$$(\mathcal{F}f)(s) = Ce^{-\frac{1}{2}s^2 - is}$$

met

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \sqrt{e}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t-1)dt = \sqrt{e}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)dt = \sqrt{2\pi e}.$$

Dus

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{2\pi e} \;\; e^{-\frac{1}{2}s^2 - is}.$$

$\diamondsuit$

4.3 De Fourierinversie formule

De Fourierinversie formule (97) geeft aan hoe een functie f uit zijn Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$ kan worden gereconstrueerd, als f tenminste aan bepaalde voorwaarden voldoet. In fysische taal komt de Fourierinversie formule erop neer dat $f(t)$ wordt geschreven als een *continue superpositie* van eenvoudige golven $\widehat{f}(s)e^{ist}$, met golflengte $\frac{2\pi}{s}$ en amplitude $\widehat{f}(s)$.

Stelling 4.12 *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continu differentieerbare en absoluut integreerbare functie. Dan bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de limiet*

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds\right]$$

en geldt de ***Fourierinversie formule:***

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) \;+\; f(x^-)\right] \;=\; \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds\right]. \tag{97}$$

Als de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ics}ds$ convergeert voor elke $x \in \mathbb{R}$ en f is continu op $\mathbb{R}$, dan neemt formule (97) de volgende aantrekkelijke gedaante aan:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds. \tag{98}$$

Als de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds$ convergeert voor elke $x \in \mathbb{R}$ en f is continu op $\mathbb{R}$, kan formule (98) ook worden geschreven als :

$$(\mathcal{F}\widehat{f})(x) = 2\pi f(-x) \qquad \text{voor elke } \; x \in \mathbb{R}. \tag{99}$$

♡ **Opmerking.** Volgens de stelling bestaat $\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds\right]$. Aangezien in deze limiet een koppeling wordt gemaakt tussen de manier waarop de boven- resp. ondergrens van het integratie-interval naar ∞ resp. $-\infty$ gaan, impliceert de stelling *niet* dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds$ bestaat. *Wanneer we (om andere redenen) weten dat deze oneigenlijke integraal toch convergeert*, dan is natuurlijk wel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds \;=\; \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds\right].$$

Dit is zeker het geval als de functies f, f' en f'' allemaal continu en absoluut integreerbaar zijn. Inderdaad, dan is $\widehat{f}$ continu en volgt uit Stelling 4.9 dat

$$|\widehat{f}(s)| \leq \frac{C}{|s|^2}\,,$$

zodat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{ixs}ds$ (absoluut) convergent is voor elke $x\in\mathbb{R}$. ♡

Bewijs: (voor de liefhebber) Laat $c\in\mathbb{R}$ gegeven zijn. Definieer daarbij een nieuwe functie φ:

$$\varphi(0) := 0\,, \qquad \varphi(t) := f(t+x) - Ae^{-\frac{1}{2}t^2} - Bv(t) \quad \text{voor} \quad t\neq 0 \qquad (100)$$

met

$$A = \frac{1}{2}\left[f(x^+)\,+\,f(x^-)\right], \quad B = \frac{1}{2}\left[f(x^+)\,-\,f(x^-)\right]$$

en

$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -1<t<0, \\ 1 & \text{als} \quad 0<t<1, \\ 0 & \text{als} \quad t=0 \text{ of } |t|\geq 1. \end{cases}$$

Volgens Stelling 4.11, het voorbeeld na Stelling 4.8 en opgave 1 in paragraaf 4.4 is de Fouriergetransformeerde van φ

$$\widehat{\varphi}(s) = e^{ixs}\widehat{f}(s) - A\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}s^2} - 2Bi\frac{\cos s - 1}{s}. \qquad (101)$$

Bekend is

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds\right] = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds = \sqrt{2\pi}.$$

Verder is voor elke $R > 0$

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos s - 1}{s} ds = 0$$

omdat de integrand een *oneven functie* is, d.w.z. $\dfrac{\cos(-s) - 1}{-s} = -\dfrac{\cos s - 1}{s}$.
Zo zien we:

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} \widehat{f}(s) e^{ics} ds \right] \text{ bestaat} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} \widehat{\varphi}(s) ds \right] \text{ bestaat.}$$

Formule (97) blijkt equivalent te zijn met

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} \widehat{\varphi}(s) ds \right] = 0. \tag{102}$$

Om formule (102) te bewijzen construeren we een primitieve van $\widehat{\varphi}$. Definieer eerst de functie g door

$$g(0) = 0\,, \qquad g(t) = \frac{1}{t}\varphi(t) \quad \text{voor } \ t \neq 0.$$

Omdat $|g(t)| \leq |\varphi(t)|$ is voor $|t| \geq 1$ en omdat φ absoluut integreerbaar is, is volgens de majorantie stelling ook g absoluut integreerbaar. Verder kan g alleen discontinuïteiten vertonen in de discontinuïteitspunten van φ en bij $t = 0$. Voor een discontinuïteitspunt $t_j \neq 0$ van φ bestaan

$$g(t_j^-) = \frac{1}{t_j} \lim_{t\uparrow t_j} \varphi(t) \qquad \text{en} \qquad g(t_j^+) = \frac{1}{t_j} \lim_{t\downarrow t_j} \varphi(t)$$

omdat φ een stuksgewijs continue functie is. Voor het eventuele discontinuïteitspunt 0 is

$$\begin{aligned} g(0^-) &= \lim_{t\uparrow 0} \lim_{y\uparrow 0} \frac{f(t+x) - f(y+x)}{t-y} = \lim_{\xi\uparrow x} f'(\xi) = f'(x^-) \\ g(0^+) &= \lim_{t\downarrow 0} \lim_{y\downarrow 0} \frac{f(t+x) - f(y+x)}{t-y} = \lim_{\xi\downarrow x} f'(\xi) = f'(x^+) \end{aligned}$$

waarbij de limieten rechts bestaan vanwege de veronderstelling dat f een stuksgewijs continu differentieerbare functie is. Dus is g een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie.

Uit de definitie van de functie g is duidelijk dat

$$\varphi(t) = tg(t) \qquad \text{voor alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Volgens Stelling 4.6 impliceert dit voor de Fouriergetransformeerden $\widehat{g}$ resp. $\widehat{\varphi}$ van g resp. φ:

$$\widehat{\varphi}(s) = i\,(\widehat{g})'(s) \qquad \text{voor alle} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zo blijkt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{\varphi}(s)ds = i \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} (\widehat{g})'(s)ds = i \lim_{R\to\infty} \widehat{g}(R) - i \lim_{R\to\infty} \widehat{g}(-R) = 0$$

waar bij het laatste gelijk-teken Stelling 4.4 is gebruikt.

Hiermee is het bewijs van de Fourierinversie formule (97) geleverd. ■

Laten we de Fourierinversie formule (97) nog eens nader bekijken. Wanneer de functie f continu is in het punt x, dan is het linkerlid gelijk aan $f(x)$. Wat betreft het rechterlid van de Fourierinversie formule (97) geldt

$$\int_{-R}^{R} \widehat{f}(s)e^{ixs}ds = \int_{0}^{R} \left[\widehat{f}(s)e^{ixs} + \widehat{f}(-s)e^{-ixs}\right] ds\ .$$

Dus is het bestaan van de limiet $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(s)e^{ixs}ds$ equivalent met het gewoon convergeren van de oneigenlijke integraal

$$\int_{0}^{\infty} \left[\widehat{f}(s)e^{ixs} + \widehat{f}(-s)e^{-ixs}\right] ds\,.$$

De integrand hierin kunnen we schrijven als

$$\widehat{f}(s)e^{ixs} + \widehat{f}(-s)e^{-ixs} = A(s)\cos(xs) + B(s)\sin(xs)$$

waarin

$$\begin{aligned} A(s) &= \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)\ dt, \\ B(s) &= i\left[\widehat{f}(s) - \widehat{f}(-s)\right] = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)\ dt. \end{aligned}$$

We vatten de voorgaande discussie als volgt samen:

Gevolg 4.13 *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continu-differentieerbare en absoluut integreerbare functie. Dan, voor iedere punt $x \in \mathbb{R}$ waarin f continu is, geldt*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [a(s)\cos(xs) + b(s)\sin(xs)]ds \tag{103}$$

met

$$a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)dt, \quad b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)dt\,. \tag{104}$$

♡ Opmerkingen

1. Als f een *even functie* is (dwz. $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$) dan $b(s) \equiv 0$ en in (103) komen geen sinus-termen voor. *Een even functie f, die ook voldoet aan de voorwaarden van Gevolg* 4.13*, wordt dus gegeven door een cosinus-integraal*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty a(s)\cos(xs)ds \quad \text{ met } \ a(s) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(st)dt.$$

2. Als f een *oneven functie* is (dwz. $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$), dan is $a(s) \equiv 0$. Dus *wordt een oneven functie f, die ook voldoet aan de voorwaarden van Gevolg* 4.13*, gegeven door een sinus-integraal*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty b(s)\sin(xs)ds \quad \text{ met } \ b(s) = 2\int_0^\infty f(t)\sin(st)dt.$$

♡

♢ Voorbeelden

1. Neem een even continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie $f(x) = e^{-a|x|}$ met $a > 0$. Dan

$$\begin{aligned} a(s) &= 2\int_0^\infty e^{-at}\cos(st)dt = \int_0^\infty e^{-at}\left(e^{ist} + e^{-ist}\right)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(a-is)t}dt + \int_0^\infty e^{-(a+is)t}dt \\ &= \frac{1}{a-is} + \frac{1}{a+is} = \frac{2a}{a^2+s^2}\,. \end{aligned}$$

Gevolg 4.13 impliceert

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty a(s) \cos(xs) dx$$

ofwel

$$e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(xs)}{a^2 + s^2} \, ds \, .$$

Hieruit volgt voor $a > 0$ en $x \geq 0$ de formule

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xs)}{a^2 + s^2} \, ds = \frac{\pi}{2a} e^{-ax} \, . \tag{105}$$

Met de afgeleide naar x krijgen we

$$\int_0^\infty \frac{s \ \sin(xs)}{a^2 + s^2} \, ds = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \, . \tag{106}$$

(Zie ook opgave 8 in paragraaf 4.4.)

2. We beschouwen de functie f gedefinieerd door

$$f(t) = \tfrac{1}{2} \quad \text{als} \quad |t| \leq 1 \, , \qquad f(t) = 0 \quad \text{als} \quad |t| > 1 \, .$$

Deze functie is even, stuksgewijs continu-differentieerbaar en absoluut integreerbaar. Eerder zagen we al dat

$$\widehat{f}(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin s}{s} & \text{als} \ \ s \neq 0; \\ 1 & \text{als} \ \ s = 0. \end{cases}$$

Dus

$$a(s) = \frac{1}{2} \left(\widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) \right) = \widehat{f}(s) \, .$$

De functie f is continu in $x \neq \pm 1$. Gevolg 4.13 impliceert dat

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty a(s) \cos(xs) \ ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin s \ \cos(xs)}{s} \ ds$$

voor alle $x \neq \pm 1$. Met name, in $x = 0$ hebben we

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin s}{s} \ ds$$

en dus

$$\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\, ds = \frac{\pi}{2}\ .$$

Dit resultaat is al genoemd in de opmerking aan het eind van paragraaf 3.1.

$\diamondsuit$

Een andere beroemde formule is *de formule van Plancherel*.

Stelling 4.14 *Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn waarvoor beide oneigenlijke integralen $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$ convergeren. Dan convergeert ook de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2\, ds$ en geldt de* ***formule van Plancherel****:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2\, ds. \tag{107}$$

Het linkerlid van (107) kan worden geïnterpreteerd als de totale energie corresponderend met f, terwijl in het rechterlid $|\widehat{f}(s)|^2$ kan worden geïnterpreteerd als de energiedichtheid waarmee de frequentie $\frac{s}{2\pi}$ in de Fourierontbinding van f vertegenwoordigd is.

$\heartsuit$ **Opmerking.** Een functie f waarvoor $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ convergeert noemt men *absoluut integreerbaar*; een functie f waarvoor $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$ convergeert noemt men *kwadratisch integreerbaar*. De continue begrensde functie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

is kwadratisch integreerbaar maar niet absoluut integreerbaar. $\heartsuit$

Bewijsschets: De onderstaande rekenpartij geeft slechts een indicatie van het bewijs. Voor een wiskundig volledig verantwoord bewijs zou men elke oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty}$ moeten benaderen met een integraal $\int_a^b$ over een eindig interval en zou men zorgvuldig moeten nagaan hoe groot de “fout” is in die benadering. De echte liefhebber wordt uitgenodigd de details zelf in te vullen.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 \, ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\overline{\widehat{f}(s)} \, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist} \, dt} \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, e^{ist} \, dt \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\overline{f(t)}\, e^{ist} \, dt \, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\, e^{ist} \, ds \right) dt \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, f(t) \, dt \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt.
\end{aligned}
$$

■

♢ **Voorbeeld.** We beschouwen nog een keer de functie f gedefinieerd door

$$
f(t) = \tfrac{1}{2} \quad \text{als} \quad |t| \leq 1\,, \qquad f(t) = 0 \quad \text{als} \quad |t| > 1\,.
$$

Er geldt dat

$$
2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \, dt = \pi.
$$

Eerder zagen we al dat

$$
\widehat{f}(s) = \frac{\sin s}{s} \quad \text{voor } s \neq 0 \quad \text{en} \quad \widehat{f}(0) = 1\,.
$$

De formule van Plancherel levert nu:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s} \right)^2 \, ds = \pi.
$$

♢

De Fouriertransformatie speelt een belangrijke rol in de *quantummechanica.* Neem bijvoorbeeld een deeltje dat langs een rechte lijn kan bewegen. Dat wordt beschreven in de quantummechanica door een *golffunctie* $\psi(x)$ zo dat $|\psi(x)|^2$ geïnterpreteerd wordt als de kansdichtheid dat het deeltje zich in positie x bevindt. Stel dat deze functie tweemaal continu differentieerbaar is en dat de functies $x\psi(x)$ en $\psi'(x)$ absoluut en kwadratisch integreerbaar zijn, terwijl de functie $\psi''(x)$ absoluut integreerbaar is. We kunnen dan de golffunctie schrijven als

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k)e^{ikx}dk$$

waarin

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-ikx}dx = (\mathcal{F}\psi)(k)\,,$$

de Fouriergetransformeerde van ψ. Dus is de golffunctie ψ een lineaire combinatie (of 'continue superpositie') van de basis-golven e^{ikx}. Bij een basis-golf e^{ikx} hoort *impuls*

$$p = \hbar k\,,$$

waarin $2\pi\hbar = h$ de *constante van Planck.*

Er geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{108}$$

De formule van Plancherel (107) impliceert

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(k)|^2 dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 2\pi\,.$$

Dan is

$$\frac{1}{2\pi}\left|\varphi\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right|^2$$

de kansdichtheid dat het deeltje impuls p heeft.

Stel dat de *verwachtingswaarden* van x en k nul zijn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k|\varphi(k)|^2 dk = 0. \tag{109}$$

Definieer de *varianties*

$$\Delta_x^2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

en

$$\Delta_k^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\varphi(k)|^2 dk\,.$$

Deze grootheden bepalen hoeveel x en k van nul afwijken.

Stelling 4.15

$$\Delta_x^2 \Delta_k^2 \geq \frac{1}{4} \tag{110}$$

Bewijs: Neem $\alpha \in \mathbb{R}$ en definieer

$$I(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \left|\alpha x \psi(x) + \psi'(x)\right|^2 dx \geq 0.$$

We hebben

$$\left|\alpha x \psi + \psi'\right|^2 = (\alpha x \psi + \psi')(\alpha x \overline{\psi} + \overline{\psi'})$$

en dus

$$I(\alpha) = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi|^2 dx \; + \; \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(\psi \overline{\psi'} + \psi' \overline{\psi}) dx \; + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'|^2 dx.$$

Verder

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\psi \overline{\psi'} + \psi' \overline{\psi}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x(\psi \overline{\psi})' dx = \lim_{R \to \infty} x |\psi|^2 \Big|_{-R}^{R} - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = -1\,,$$

omdat $x|\psi(x)|^2 \to 0$ als $x \to \pm\infty$ wegens de convergentie van de eerste integraal in (109). Hier ook is de normalisatie (108) toegepast.

Vervolgens hebben we $(\mathcal{F}\psi')(k) = ik(\mathcal{F}\psi)(k) = ik\varphi(k)$, zodat de formule van Plancherel geeft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}\psi')|^2 dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\varphi|^2 dk$$

Dus

$$I(\alpha) = \Delta_x^2 \alpha^2 - \alpha + \Delta_k^2\,.$$

Omdat $I(\alpha) \geq 0$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$, heeft deze kwadratische veelterm hoogstens één reëel nulpunt. Hieruit volgt dat de discriminant van I voldoet aan

$$D = (-1)^2 - 4\Delta_x^2\Delta_k^2 \leq 0.$$

Deze ongelijkheid impliceert (110). ■

Formule (110) leidt tot de beroemde *Onzekerheidsrelatie van Heisenberg*

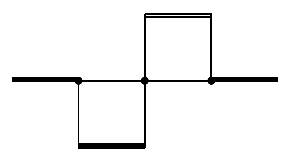
$$\Delta_x^2\Delta_p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\,.$$

De relatie drukt uit dat het onmogelijk is om de exacte waarden van positie en impuls tegelijkertijd te meten.

4.4 Opgaven

1. Neem de functie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

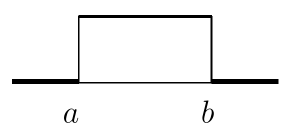
$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -1 < t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{als} \quad t = 0 \text{ of } |t| \geq 1 \end{cases}$$



Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}v$.

2. Laat $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Neem de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

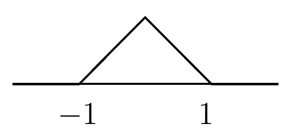
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad a \leq t \leq b; \\ 0 & \text{als} \quad t \notin [a, b]. \end{cases}$$



Bepaal de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$ van f.

3. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{als} \quad |t| < 1; \\ 0 & \text{als} \quad |t| \geq 1. \end{cases}$$



Bepaal de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.

4. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie en zij a een reëel getal, $a \neq 0$. Definieer daarbij de functie g door $g(t) = f(at)$. Laat zien dat de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}$ wordt gegeven door
$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{|a|}\,\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

5. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie. Definieer daarbij de functie g door $g(t) = \overline{f(t)}$. Laat zien dat de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}$ wordt gegeven door
$$\widehat{g}(s) = \overline{\widehat{f}(-s)}.$$

6. Laat zien dat voor elke $a \neq 0$ de oneigenlijke integraal
$$\int_1^\infty t^{-1} e^{-iat} dt$$
convergeert. *Hint:* Gebruik partiële integratie.

7. Neem de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ voor $t \neq 0$ en $f(0) = 1$.
   (a) Ga na dat f een continue functie is.
   (b) Laat zien dat de integraal $\int_{-\infty}^\infty e^{-ist} f(t) dt$ convergeert voor elke $s \in \mathbb{R}$ met $s \neq \pm 1$. *Hint:* Gebruik $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ en de vorige opgave.
   (c) Laat zien dat de integraal $\int_{-\infty}^\infty e^{-ist} f(t) dt$ niet convergeert voor $s = 1$ en voor $s = -1$.
   (d) Waarom volgt uit het vorige onderdeel dat de functie f *niet* absoluut integreerbaar is?

8. Zij $a > 0$. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{als} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad t < 0 \end{cases}$$
   (a) Bepaal $\widehat{f}$.

(b) Bewijs met behulp van de inversie formules voor $f(c)$ en $f(-c)$ dat voor $c > 0$ geldt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos cs}{a^2 + s^2}\, ds = \frac{\pi}{2a} e^{-ac} \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{s \sin cs}{a^2 + s^2}\, ds = \frac{\pi}{2} e^{-ac}$$

(de ***integralen van Laplace***).

9. We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$\varphi(t) = \begin{cases} te^{-t} & \text{als} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad t < 0. \end{cases}$$

(a) Bereken $\hat{\varphi}$.

(b) Bereken:

$$\int_0^\infty \frac{(1 - s^2)\cos s}{(1 + s^2)^2}\, ds.$$

Hint: gebruik van (a) en de inversie formules voor $\varphi(1)$ en $\varphi(-1)$.

10. Laat n een geheel getal zijn met $n \geq 0$. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} x^n e^{-x} & \text{als} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Bepaal $\widehat{f}$.

(b) Bereken met behulp van de formule van Plancherel de integraal

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

11. Definieer de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x < 1 \\ x^{-1} & \text{als} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Laat zien dat de functie f niet absoluut integreerbaar is.

(b) Laat zien dat de functie f wel kwadratisch integreerbaar is.

12. (Deze opgave vereist enige kennis van convergentie van reeksen)

Definieer de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{als er een geheel getal } n > 1 \text{ is zodat } |x-n| < |n|^{-3} \\ 0 & \text{als voor elk geheel getal } n > 1 \text{ geldt } |x-n| \geq |n|^{-3} \end{cases}$$

(a) Teken de grafiek van g.

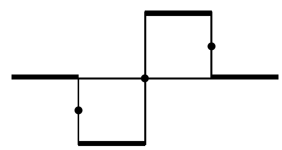
(b) Laat zien dat g een stuksgewijs continue functie is.

(c) Laat zien dat de functie g wel absoluut integreerbaar is.

(d) Laat zien dat de functie g niet kwadratisch integreerbaar is.

13. Neem de functie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -1 < t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{als} \quad |t| > 1 \end{cases}$$



$$v(-1) = -\tfrac{1}{2}, \quad v(0) = 0, \quad v(1) = \tfrac{1}{2}$$

(a) Bereken de Fouriergetransformeerde $\widehat{v}$.

(b) Laat zien dat de functie v stuksgewijs continu differentieerbaar is en bereken de afgeleide v'

(c) Laat zien dat $v(c) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\downarrow c} v(x) + \lim_{x\uparrow c} v(x)\right]$ voor elke $c \in \mathbb{R}$.

(d) Volgens de Fourierinversie formule geldt dus

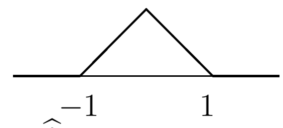
$$v(c) = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{v}(s)e^{ics}ds\right].$$

Controleer dit voor $c = 0$ door linker- en rechterlid van deze formule apart te berekenen.

(e) Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \widehat{v}(s)ds$ niet convergeert.

14. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{als} \quad |t| < 1; \\ 0 & \text{als} \quad |t| \geq 1. \end{cases}$$



(a) Bepaal de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.

(b) Laat zien dat de functie f stuksgewijs continu differentieerbaar is en bereken de afgeleide f'.

(c) Ga na dat Stelling 4.8 het verband verklaart tussen $\widehat{f}$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{v}$ in de vorige opgave.

(d) Laat zien dat $f(c) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \downarrow c} f(x) + \lim_{x \uparrow c} f(x)\right]$ voor elke $c \in \mathbb{R}$.

(e) Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{ics} ds$ absoluut convergeert voor elke $c \in \mathbb{R}$.

(f) Ga na dat nu de Fourierinversie formule kan worden verfraaid tot

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{ics} ds.$$

(g) Bepaal de Fouriergetransformeerde van $\dfrac{1 - \cos s}{s^2}$.

5 Het convolutieprodukt

Dit hoofdstuk gaat over het verband tussen Fouriertransformatie en vermenigvuldiging van functies dat belangrijk is voor de analyse van lineaire inhomogene differentiaalvergelijkingen. In de hiernavolgende paragrafen zullen we zien dat wanneer een signaal door bepaalde mechanische en elektrische systemen gaat, het uitgangssignaal het convolutieprodukt is van het ingangssignaal en een functie die de karakteristieke eigenschappen van het systeem weergeeft.

5.1 Toepassing van Fouriertransformatie bij lineaire differentiaalvergelijkingen

Zoals besproken in paragraaf 2.6 worden sommige mechanische en elektrische systemen gemodelleerd met een differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t); \tag{111}$$

daarbij is $u(t)$ het *ingangssignaal*, $v(t)$ het *uitgangssignaal* en zijn a_0 en a_1 reële constanten die relevante eigenschappen van het systeem weergeven. We nemen aan dat $a_0 > 0$ en $a_1 > 0$ zijn.

In paragraaf 2.6 hebben we bekeken hoe zo'n systeem reageert op een periodiek ingangssignaal. Nu gaan we bekijken hoe het system reageert op een absoluut integreerbaar, stuksgewijs continu ingangssignaal (bijvoorbeeld een ingangssignaal dat slechts gedurende een eindig tijdsinterval niet nul is). We passen de Fouriertransformatie toe op beide leden van de differentiaalvergelijking (111) en passen Stelling 4.9 toe. Later zullen we wel bezien of de gevonden functie v voldoet aan de voorwaarden die deze methode rechtvaardigen. We vinden dat $\mathcal{F}v$ moet voldoen aan:

$$-s^2(\mathcal{F}v)(s) + ia_1 s(\mathcal{F}v)(s) + a_0(\mathcal{F}v)(s) = (\mathcal{F}u)(s)$$

ofwel

$$P(is)\widehat{v}(s) = \widehat{u}(s)$$

waarin

$$P(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0,$$

de *karakteristieke veelterm* van de homogene differntiaalvergelijking $v'' + a_1 v' + a_0 v = 0$. Laat net als in paragraaf 2.6 λ_1, λ_2 de twee wortels van de *karakteristieke vergelijking* $P(\lambda) = 0$ zijn; d.w.z.

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

met

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Gemakshalve nemen we aan dat $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ is zodat $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Definieer nu

$$\widehat{v}(s) := \frac{1}{P(is)}\,\widehat{u}(s) = \frac{1}{-s^2 + isa_1 + a_0}\,\widehat{u}(s) \tag{112}$$

(vanwege $a_{0,1} > 0$ heeft de noemer geen reële nulpunten). Merk op dat deze formule heel erg analoog is aan formule (48). Wanneer het ingangssignaal u voldoende net is (bijvoorbeeld tweemaal continu differentieerbaar met absoluut integreerbare u, u' en u'') dan geeft de Fourierinversie formule (98):

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(s)e^{ist}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{u}(s)e^{ist}}{(is - \lambda_1)(is - \lambda_2)}\,ds\,. \tag{113}$$

Deze functie voldoet aan de voorwaarden van Stelling 4.9 en is

$$(\mathcal{F}(v'' + a_1 v' + a_0 v))(s) = (-s^2 + ia_1 s + a_0)\,\widehat{v}(s) = \widehat{u}(s).$$

De Fourierinversie formule (98) leert dat voldoende nette functies kunnen worden teruggewonnen uit hun Fouriergetransformeerde. Twee functies met gelijke Fouriergetransformeerden moeten daarom gelijk zijn. In het onderhavige geval betekent dat

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t).$$

Dit levert één speciale oplossing v van de inhomogene differentiaalvergelijking (111). Elke andere oplossing, zoals het echte uitgangssignaal, is de som van deze speciale oplossing en een oplossing van de homogene differentiaalvergelijking: $v + f$ met $f'' + a_1 f' + a_0 f = 0$. Omdat oplossingen van de homogene vergelijking uitdempen kunnen we nu concluderen dat na een (korte) aanloopperiode het uitgangssignaal (vrijwel) gelijk is aan de functie $v(t)$.

In fysische taal komt de Fourierinversie formule (98) erop neer dat een (voldoend nette) functie f wordt geschreven als een *continue superpositie* van eenvoudige golven $\widehat{f}(s)e^{ist}$, met golflengte $\frac{2\pi}{s}$ en amplitude $\widehat{f}(s)$. Vergelijk de formule (113) met het ingangssignaal

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(s) e^{its} ds.$$

We zien dat componenten in het ingangssignaal waarvan de frequentie s dicht bij $-i\lambda_1$ of $-i\lambda_2$ ligt worden versterkt, terwijl er sprake is van steeds sterkere verzwakking naar mate s verder van deze karakteristieke frequenties af ligt.

Tot nu toe hebben we gekeken naar eenvoudige fysische systemen die konden worden gemodelleerd met een tweede orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Een aantal ingewikkelder systemen kan ook worden gemodelleerd met een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, maar dan van hogere orde:

$$v^{(n)}(t) + a_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t). \tag{114}$$

Met $v^{(k)}(t)$ geven we hier de k-de afgeleide van de functie v aan.

De Fouriergetransformeerde van het linkerlid is

$$((is)^n \ + \ a_{n-1}\,(is)^{n-1} \ + \ldots + \ a_1\,(is) + a_0)\,\widehat{v}(s).$$

Bijgevolg is

$$\widehat{v}(s) = \frac{1}{(is)^n \ + \ a_{n-1}\,(is)^{n-1} \ + \ldots + \ a_1\,(is) + a_0}\,\widehat{u}(s) = \frac{1}{P(is)}\,\widehat{u}(s)$$

waarin

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

de *karakteristieke veelterm* van de homogene differentiaalvergelijking

$$v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \ldots + a_1 v' + a_0 v = 0.$$

De Fourierinversie formule impliceert dan (voor voldoende nette functies u) dat

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(s)e^{ist}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{u}(s)}{P(is)}\, e^{ist}ds$$

een oplossing is van (114).

Beschouw nog een keer de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking (111) met $a_{0,1} > 0$. In dit geval $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ met $\lambda_1 \neq \lambda_2$ en $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ voor $j = 1, 2$. Merk op dat

$$\frac{1}{P(is)} = \frac{1}{(is - \lambda_1)(is - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{is - \lambda_1} - \frac{1}{is - \lambda_2}\right)$$

Volgens (80) is het rechterlid de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}(s)$ van de functie

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t < 0, \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) & \text{als} \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{115}$$

We krijgen dus dat de Fouriergetransformeerde $\widehat{v}$ van het uitgangssignaal het produkt is van twee Fouriergetransformeerde functies:

$$\widehat{v}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{u}(s), \tag{116}$$

waarbij u het ingangssignaal is en g de karakteristieke eigenschappen van het systeem weergeeft. In Stelling 5.3 verderop zullen we zien dat (gegeven g en u) kan de functie v bereken worden via een *integraal*, nl.

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)u(t - s)\, ds\,, \tag{117}$$

dus zonder de Fouriertransformatie van u te vinden en de Fourierinversie formule te gebruiken. De integraal in (117) heet het *convolutieprodukt* van g en u.

5.2 Eigenschappen van het convolutieprodukt

Definitie 5.1 Laat $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ twee stuksgewijs continue functies zijn, van een variabele t. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is dan ook $f(t)g(x - t)$ een stuksgewijs continue functie van t. Zij S de verzameling van die getallen x waarvoor de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ convergeert. Wanneer S niet leeg is definiëren we de functie

$$f * g : S \to \mathbb{C}\,, \qquad (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt\,. \tag{118}$$

Men noemt deze functie $f * g$ het *convolutieprodukt* van f en g.

$\diamondsuit$ **Voorbeelden**

1. Neem de functies $f(t) = 0$ voor $t < 0$, $f(t) = t$ voor $t \geq 0$ en $g(t) = e^t$ voor $t \in \mathbb{R}$. Dan is voor $x \in \mathbb{R}$

$$(f * g)(x) \;=\; \int_0^{\infty} te^{x-t}\,dt \;=\; -te^{x-t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} e^{x-t}\,dt \;=\; e^x$$

2. Neem de functie $g(t) = 0$ voor $t < 0$, $g(t) = \sin t$ voor $t \geq 0$. Dan is

$$\begin{aligned}(g * g)(x) \;&=\; \int_0^x \sin t \sin(x-t)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^x (\cos(2t-x) - \cos x)\,dt \\ &=\; \frac{\sin x - x\cos x}{2}\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Lemma 5.2 *Laat $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ twee stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functies zijn. Veronderstel dat g begrensd is; d.w.z. dat er een M is zo dat $|g(t)| \leq M$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.*

Bewijs: Merk op dat voor gegeven $x \in \mathbb{R}$ en voor elke $t \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|f(t)g(x-t)| \leq M|f(t)|.$$

Ook is gegeven dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ convergeert. Vanwege de majorantie stelling convergeert nu ook $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$. $\square$

We noemen een aantal algebraïsche eigenschappen van het convolutieprodukt:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \qquad \text{(commutativiteit)} \\ f * (g_1 + g_2) &= f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(distributiviteit)} \\ (f * g) * h &= f * (g * h) \qquad \text{(associativiteit)} \\ f * 0 &= 0 \end{aligned}$$

voor zover de leden van deze gelijkheden gedefinieerd zijn. Merk op dat deze algebraïsche regels voor het convolutie produkt precies hetzelfde uitzien als de regels voor het gewone produkt. Een opmerkelijk verschil is echter dat er geen functie e is met de eigenschap $f * e = f$ voor elke functie f, terwijl de constante functie 1 wel zo'n eigenschap heeft t.a.v. het gewone produkt.

De commutativiteit van het convolutieprodukt is makkelijk te bewijzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(x-\tau)\,d\tau\,.$$

De distributiviteit van het convolutieprodukt is evident, net als de eigenschap $f*0=0$. We laten de associativiteit van het convolutieprodukt voor de lezer zelf om te bewijzen.

Als de functie f differentieerbaar is en het convolutieprodukt $f'*g$ bestaat (bijvoorbeeld, als f' en g stuksgewijs continu absoluut integreerbare functies zijn en g begrensd is), dan is de functie $f * g$ ook differntieerbaar en geldt

$$(f*g)'(x) = (f'*g)(x).$$

De volgende stelling toont de relevantie van het convolutieprodukt voor de beschrijving van de eigenschappen van de Fouriertransformatie: de Fouriertransformatie zet het convolutieprodukt om in het gewone puntsgewijze produkt van twee functies.

Stelling 5.3 *Laat $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ twee stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functies zijn. Veronderstel dat f begrensd en continu is. Dan convergeert de oneigenlijke integraal*

$$(\mathcal{F}(f*g))(s) := \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)e^{-isx}\,dx$$

voor elke $s \in \mathbb{R}$ en geldt

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = [(\mathcal{F}f)(s)]\,[(\mathcal{F}g)(s)] \tag{119}$$

ofwel $\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Bewijs: Dit is gebaseerd op het volgende resultaat:

Lemma 5.4 *Laat $v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ twee stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functies zijn. Veronderstel dat v begrensd en continu is. Dan convergeert de oneigenlijke integraal*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v * w)(x)\, dx$$

en geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v * w)(x)\ dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\ dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\ d\tau\right). \tag{120}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (v * w)(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t) w(x-t)\ dt\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(x-t)\ dx\right)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(x-t)\ d(x-t)\right)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\ d\tau\right)\ dt \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\ dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\ d\tau\right).
\end{aligned}$$

□

Om Stelling 5.3 te bewijzen, neem

$$v(t) = e^{-ist} f(t),\ \ w(\tau) = e^{-is\tau} g(t),\ \ w(x-t) = e^{-is(x-t)} g(x-t)\,.$$

Dan met Lemma 5.4:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)e^{-is(x-t)}g(x-t)\,dt\right)dx =$$
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)\;dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\tau}g(\tau)\;d\tau\right)$$

ofwel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs}(f*g)(x)\,dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)\;dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\tau}g(\tau)\;d\tau\right).$$

Dit is equivalent met (119). ■

Nu kunnen we concluderen dat de formule (116) inderdaad de formule (117) impliceert zodat $v(t) = (g*u)(t)$ een speciale oplossing is van

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t).$$

Conclusie: *Na een (korte) aanloopperiode is het uitgangssignaal v (vrijwel) gelijk aan het convolutieprodukt $g*u$ van het ingangssignaal u en de functie g die de karakteristieke eigenschappen van het systeem weergeeft.*

♢ **Voorbeeld.** Beschouw de volgende differentiaalvergelijking:

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u(t) \tag{121}$$

met

$$u(t) = e^{-|t|}. \tag{122}$$

Dan is

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

met $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Dus $\widehat{v}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{u}(s)$ waarin

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t < 0, \\ e^{-t} - e^{-2t} & \text{als} \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{123}$$

(Zie formule (115).) Met (117) krijgen we

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)u(t-s)\,ds = \int_0^{\infty}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)e^{-|t-s|}ds\,.$$

Als $t < 0$ dan $s > t$ en geldt: $|t-s| = -(t-s)$. Dus

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^\infty \left(e^{-s} - e^{-2s}\right) e^{t-s} ds = e^t \int_0^\infty \left(e^{-2s} - e^{-3s}\right) ds \\ &= e^t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} e^t. \end{aligned}$$

Als $t \geq 0$ dan $|t-s| = t-s$ voor $s \leq t$ maar $|t-s| = -(t-s)$ voor $s \geq t$. Dus moeten we de integraal opsplitsen:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \left(e^{-s} - e^{-2s}\right) e^{-(t-s)} ds + \int_t^\infty \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) e^{t-s} ds \\ &= e^{-t} \int_0^t \left(1 - e^{-s}\right) ds + e^t \int_t^\infty \left(e^{-2s} - e^{-3s}\right) ds \\ &= e^{-t}\left(t + e^{-t} - 1\right) + e^t \left(\frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-3t}\right) \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{2}{3} e^{-2t}. \end{aligned}$$

De oplossing is:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^t & \text{als} \quad t < 0, \\ \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{2}{3} e^{-2t} & \text{als} \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{124}$$

Opgave: Controleer dat (124) inderdaad een oplossing van (121) is.

We weten dat

$$\widehat{u}(s) = \frac{2}{1+s^2}\,.$$

Dus levert de formule (113) een andere representatie van de oplossing:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\widehat{u}(s) e^{ist}}{P(is)}\, ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ist}}{(1+s^2)(is+1)(is+2)}\, ds$$

De formule (117) maakt de evaluatie van deze integraal overbodig. $\diamondsuit$

Bij de *signaalverwerking* gebruikt men de volgende definitie.

Definitie 5.5 Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn, van een variabele t. Zij S de verzameling van die getallen x waarvoor de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(x+t)\, dt$ convergeert. Wanneer S niet leeg is definiëren we de functie

$$R_f : S \to \mathbb{C}\,, \qquad R_f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(x+t)\, dt\,. \tag{125}$$

Men noemt deze functie R_f de *autocorrelatie* van f.

Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tweemaal continu differentieerbaar en f, f' en f'' absoluut integreerbaar zijn, dan $S = \mathbb{R}$. In dit geval hebben we

$$R_f(-x) = \overline{R_f(x)}$$

waaruit blijkt dat R_f reëel en even voor reële f. Dan geldt

$$\max_{x \in \mathbb{R}} R_f(x) = R_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt\,.$$

Het volgend resultaat is de makkelijkste versie van de *Wiener-Khinchin Stelling.*

Stelling 5.6 *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een tweemaal continu differentieerbare functie met absoluut integreerbare f, f' en f''. Dan geldt*

$$\widehat{R}_f = |\widehat{f}\,|^2. \tag{126}$$

Bewijs: Merk op dat

$$R_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-\tau)} f(x-\tau)\, d\tau = (g * f)(x)$$

waarin $g(\tau) := \overline{f(-\tau)}$. We hebben $\widehat{g}(s) = \overline{\widehat{f}(-(-s))} = \overline{\widehat{f}(s)}$. Dus, met Stelling 5.3: $\widehat{R}_f = \widehat{g * f} = \widehat{g}\ \ \widehat{f} = \overline{\widehat{f}}\ \widehat{f} = |\widehat{f}\,|^2$. ∎

Samen met de Fourierinversie formule, impliceert (126) dat

$$R_f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(|\widehat{f}\,|^2)(-x)\,.$$

♡ **Opmerking.** De combinatie van de Fourierinversie formule en formule (119) levert (voor voldoende nette functies) nog een mooie formule:

$$\mathcal{F}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi}\left[(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)\right](s) \qquad (127)$$

ofwel $\widehat{(fg)} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$. Inderdaad, volgt uit Stelling 5.3 dat

$$\mathcal{F}(\widehat{f} * \widehat{g})(x) = (\mathcal{F}\widehat{f})(x)\ (\mathcal{F}\widehat{g})(x)\,.$$

De Fourierinversie formule geeft

$$(\mathcal{F}\widehat{f})(x) = 2\pi f(-x) \quad \text{en} \quad (\mathcal{F}\widehat{g})(x) = 2\pi g(-x)$$

zodat

$$\mathcal{F}(\widehat{f} * \widehat{g})(-x) = (2\pi)^2 f(x)g(x)\ .$$

De Fouriertransformatie van deze vergelijking leidt tot

$$\mathcal{F}^2(\widehat{f} * \widehat{g})(-s) = (2\pi)^2(\mathcal{F}(fg))(s)$$

ofwel

$$\mathcal{F}(\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}})(-s) = (2\pi)^2(\mathcal{F}(fg))(s)\,.$$

De Fourierinversie formule nogmaals gebruikend, zien we dat

$$2\pi(\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}})(s) = (2\pi)^2(\mathcal{F}(fg))(s)$$

waaruit (127) volgt. ♡

5.3 Lineaire DV met constante coëfficiënten en breuksplitsen

De speciale oplossing $v(t)$ van (114) is dus het convolutieprodukt

$$(g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)u(t-s)\,ds$$

van het ingangssignaal $u(t)$ met de functie $g(u)$ waarvan de Fouriergetransformeerde is

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{P(is)} = \frac{1}{(is)^n\ +\ a_{n-1}\,(is)^{n-1}\ + \ldots +\ a_1\,(is) + a_0}\,.$$

Om deze functie g te vinden moeten we de breuk schrijven als een lineaire combinatie van breuken die zo eenvoudig zijn dat we daarvoor gemakkelijk een functie kunnen vinden die deze eenvoudige breuk als Fouriergetransformeerde heeft.

In de paragraaf 5.1 was de noemer slechts een tweede graads polynoom en was splitsen heel eenvoudig:

$$\frac{1}{P(is)} = \frac{1}{(is-\lambda_1)(is-\lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{1}{is-\lambda_1} - \frac{1}{is-\lambda_2}\right).$$

De lezer kan dit achteraf controleren door het resultaat weer "onder één noemer te brengen".

De moeilijker vraag "om een gegeven breuk te schrijven als een lineaire combinatie van eenvoudige breuken" zullen we nu beantwoorden. De methode heet *breuksplitsen.* We zullen eerst de algemene theorie van breuksplitsing behandelen en daarna terugkomen op de functie die die breuk als Fouriergetransformeerde heeft.

5.3.1 Breuksplitsing

Een *veelterm* (of *veeltermfunctie*) is een functie gedefinieerd op het hele complexe vlak door een voorschrift van de vorm

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{voor} \quad z \in \mathbb{C}\,;$$

daarbij is $n > 0$ een geheel getal en zijn de coëfficiënten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ complexe getallen. Als $a_n \neq 0$ is zegt men dat $p(z)$ een *veelterm van graad* n is. Als alle coëfficiënten 0 zijn is $p(z)$ de nulfunctie en de graad van de nulfunctie stelt men meestal op $-\infty$.

Een *rationale functie* is het quotient

$$\frac{q(z)}{p(z)}$$

van twee veeltermen $q(z)$ en $p(z)$ met $p(z)$ niet de nulfunctie. Bij de (eindig veel) nulpunten van $p(z)$ kan deze rationale functie discontinuïteiten vertonen. Als de veeltermen $q(z)$ en $p(z)$ reële coëfficiënten hebben en a is het grootste reële nulpunt van $p(z)$ dan is de functie $\frac{q(z)}{p(z)}$ op het reële interval (a, ∞) in elk geval continu en zelfs willekeurig vaak differentieerbaar.

De Hoofdstelling van de Algebra zegt dat de veelterm $p(z)$ te schrijven is als een produkt

$$p(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1)^{m_1} \cdot (z - \lambda_2)^{m_2} \cdots (z - \lambda_d)^{m_r} = a_n \prod_{j=1}^{d} (z - \lambda_j)^{m_j} \quad (128)$$

met complexe getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ en positieve gehele getallen $m_1, \ldots, m_d$ en zo dat $\lambda_j \neq \lambda_k$ als $j \neq k$. De getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ heten de *wortels* (of *nulpunten*) van $p(z)$ en m_j is de *multipliciteit* van de wortel λ_j. Er geldt: $m_1 + m_2 + \ldots + m_d = n =$ de graad van de veelterm $p(z)$.

De Hoofdstelling van de Algebra zegt niet hoe we de wortels $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ kunnen berekenen. Voor een tweede graads veelterm $az^2 + bz + c$ weten we van de middelbare school dat de wortels λ_1 en λ_2 worden gegeven door

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en dus

$$az^2 + bz + c = a(z - \lambda_1)(z - \lambda_2).$$

Voor veeltermen van graad > 2 is het vinden van de wortels echter een i.h.a. veel moeilijker probleem, dat we in voorkomende gevallen ad hoc zullen oplossen door eens goed naar de veelterm te kijken.

De Algebra leert ook dat elke rationale functie $\frac{q(z)}{p(z)}$ te schrijven is als een lineaire combinatie

$$\frac{q(z)}{p(z)} = r(z) + \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{j,m}}{(z - \lambda_j)^m} \quad (129)$$

met dezelfde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ en $m_1, \ldots, m_d$ als in (128); verder is hier $r(z)$ een veelterm en zijn de coëfficiënten $c_{j,m}$ complexe getallen. Men noemt het rechterlid van (129) de *breuksplitsing* van de rationale functie $\frac{q(z)}{p(z)}$.

We gaan hier niet in op bewijzen voor de Hoofdstelling van de Algebra en voor de stelling dat zo'n breuksplitsing inderdaad altijd mogelijk is (en zelfs uniek is d.w.z. bij gegeven $q(z)$ en $p(z)$ zijn er precies één veelterm $\ell(z)$ en precies één n-tal coëfficiënten $\{c_{j,m}\}$ die voldoen aan de vergelijking (129)). We accepteren dat breuksplitsing bestaat en kijken nu naar de praktische vraag hoe we de veelterm $\ell(z)$ en de coëfficiënten $c_{j,m}$ in concrete gevallen kunnen berekenen.

Als we beide kanten van de gelijkheid (129) vermenigvuldigen met $p(z)$ vinden we

$$q(z) = r(z)p(z) + u(z)$$

met

$$u(z) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=1}^{m_j} c_{j,m} \frac{p(z)}{(z-\lambda_j)^m}. \tag{130}$$

Hier staan in het rechterlid niet echt breuken, want als je ook let op (128) dan zie je dat

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{(z-\lambda_j)^m} \;&=\; a_n(z-\lambda_1)^{m_1}\cdots(z-\lambda_{j-1})^{m_{j-1}}\times \\ &\quad \times(z-\lambda_j)^{m_j-m}(z-\lambda_{j+1})^{m_{j+1}}\cdots(z-\lambda_d)^{m_d} \end{aligned} \tag{131}$$

Dus $u(z)$ is een veelterm met graad $u <$ graad p.

Men kan $r(z)$ en $u(z)$ vinden door in een staartdeling $q(z)$ te delen door $p(z)$, waarbij $u(z)$ overblijft als rest. Deze staartdelingen zijn bekend (van de middelbare school?). Wij gaan er daarom van uit dat we $u(z)$ al kennen en concentreren ons op de berekening van de coëfficiënten $c_{j,m}$. Trouwens, als graad $q <$ graad p dan is $r(z) = 0$ en $u(z) = q(z)$ en kennen we $u(z)$ dus inderdaad al zonder te rekenen.

Als je voor z in (130) een complex getal invult, ontstaat er een lineaire vergelijking voor de n onbekenden $c_{j,m}$. Als je voor z in (130) achtereenvolgens n verschillende complexe getallen invult, ontstaat er een systeem van n lineaire vergelijkingen voor de n onbekenden $c_{j,m}$. Zo wordt het probleem omgezet in de standaard lineaire algebra som over het oplossen van een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden.

Je kunt deze lineaire algebra som extra eenvoudig houden door voor z in (130) achtereenvolgens in te vullen de wortels $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ en nog $n-d$ andere complexe getallen. I.v.m. (131) worden dan de eerste d lineaire vergelijkingen

$$u(\lambda_j) = c_{j,m_j} a_n(\lambda_j-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda_j-\lambda_{j-1})^{m_{j-1}}(\lambda_j-\lambda_{j+1})^{m_{j+1}}\cdots(\lambda_j-\lambda_d)^{m_d} \tag{132}$$

voor $j = 1, \ldots, d$.

♡ **Opmerking.** Men kan hierbij nog opmerken dat

$$a_n(\lambda_j-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda_j-\lambda_{j-1})^{m_{j-1}}(\lambda_j-\lambda_{j+1})^{m_{j+1}}\cdots(\lambda_j-\lambda_d)^{m_d} =$$

$$= \lim_{z\to\lambda_j} \frac{p(z)}{(z-\lambda_j)^{m_j}} \;=\; \frac{1}{m_j!} p^{(m_j)}(\lambda_j)$$

waarbij $p^{(m_j)}$ de m_j-de afgeleide is van p; voor deze laatste gelijkheid moet je denken aan het begin van de Taylorreeks van $p(z)$ rond λ_j of aan de regel van l'Hôpital. Zo vinden we dus

$$c_{j,m_j} = m_j! \frac{u(\lambda_j)}{p^{(m_j)}(\lambda_j)}.$$

♡

♢ Voorbeelden

1. Gezocht $c_{1,1}$ en $c_{2,1}$ zo dat

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2} = \frac{c_{1,1}}{z-1} + \frac{c_{2,1}}{z-2}.$$

   Vergelijking (130) luidt in dit concrete geval

$$z+1 = c_{1,1}(z-2) + c_{2,1}(z-1).$$

   Door hierin $z = 1$ te nemen vind je $c_{1,1} = -2$ en net zo, door $z = 2$ te nemen, vind je $c_{2,1} = 3$. Conclusie:

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2} = \frac{-2}{z-1} + \frac{3}{z-2}.$$

2. Gezocht $c_{1,1}$, $c_{2,1}$, $c_{3,1}$ zo dat

$$\frac{1}{z(z^2-3z+2)} = \frac{c_{1,1}}{z-1} + \frac{c_{2,1}}{z-2} + \frac{c_{3,1}}{z}$$

   Vergelijking (130) wordt in dit geval

$$1 = c_{1,1}z(z-2) + c_{2,1}z(z-1) + c_{3,1}(z-1)(z-2).$$

   Door nu achtereenvolgens $z = 1$, $z = 2$, $z = 0$ te nemen vind je

$$c_{1,1} = -1\,, \qquad c_{2,1} = \frac{1}{2}\,, \qquad c_{3,1} = \frac{1}{2}$$

   Conclusie:

$$\frac{1}{z(z^2-3z+2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2} + \frac{\frac{1}{2}}{z}.$$

3. Gezocht $c_{1,1}$, $c_{2,1}$, $c_{3,1}$, $c_{3,2}$ zo dat

$$\frac{1}{z^2(z^2-3z+2)} = \frac{c_{1,1}}{z-1} + \frac{c_{2,1}}{z-2} + \frac{c_{3,1}}{z} + \frac{c_{3,2}}{z^2}$$

Vergelijking (130) wordt in dit geval

$1 = c_{1,1}z^2(z-2) + c_{2,1}z^2(z-1) + c_{3,1}z(z-1)(z-2) + c_{3,2}(z-1)(z-2).$

Door achtereenvolgens $z=1$, $z=2$, $z=0$ te nemen vind je

$$c_{1,1} = -1\,, \qquad c_{2,1} = \frac{1}{4}\,, \qquad c_{3,2} = \frac{1}{2}.$$

Om tot slot $c_{3,1}$ te berekenen nemen we $z=-1$ (alles behalve 0, 1, 2 zou het even goed doen) en vinden zo

$$1 = 3 - \frac{1}{2} - 6c_{3,1} + 3\,, \qquad \text{dus} \quad c_{3,1} = \frac{3}{4}.$$

Conclusie:

$$\frac{1}{z^2(z^2-3z+2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{\frac{1}{4}}{z-2} + \frac{\frac{3}{4}}{z} + \frac{\frac{1}{2}}{z^2}.$$

4. Gezocht $c_{1,1}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$, $c_{3,1}$ zo dat

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)^2(z+2)} = \frac{c_{1,1}}{z-1} + \frac{c_{2,1}}{z+1} + \frac{c_{2,2}}{(z+1)^2} + \frac{c_{3,1}}{z+2}$$

Vergelijking (130) wordt in dit geval

$$\begin{aligned} 1 \;\; = \;\; & c_{1,1}(z+1)^2(z+2) + c_{2,1}(z-1)(z+1)(z+2) + \\ & c_{2,2}(z-1)(z+2) + c_{3,1}(z-1)(z+1)^2. \end{aligned}$$

Door achtereenvolgens $z=1$, $z=-1$, $z=-2$ te nemen vind je

$$c_{1,1} = \frac{1}{12}\,, \qquad c_{2,2} = -\frac{1}{2}\,, \qquad c_{3,1} = -\frac{1}{3}.$$

Om tot slot $c_{2,1}$ te berekenen nemen we $z=0$ (alles behalve 1, −1, −2 zou het even goed doen) en vinden zo

$$1 = \frac{1}{6} - 2c_{2,1} + 1 + \frac{1}{3}\,, \qquad \text{dus} \quad c_{2,1} = \frac{1}{4}.$$

Conclusie:

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)^2(z+2)} = \frac{\frac{1}{12}}{z-1} + \frac{\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(z+1)^2} + \frac{-\frac{1}{3}}{z+2}. \qquad (133)$$

5.3.2 Fourierinverse en breuksplitsing

We komen terug op de vraag: *Van welke functie is*

$$\frac{1}{P(is)} = \frac{1}{(is)^n \ + \ a_{n-1}\,(is)^{n-1} \ + \ldots + \ a_1\,(is) + a_0} \tag{134}$$

de Fouriergetransformeerde?

We schrijven

$$P(z) = z^n \ + \ a_{n-1}\,z^{n-1} \ + \ldots + \ a_1\,z + a_0 = (z-\lambda_1)^{m_1}\cdots(z-\lambda_r)^{m_d}$$

en splitsen de breuk

$$\frac{1}{P(z)} \ = \sum_{j=1}^{d}\sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{j,m}}{(z-\lambda_j)^m}. \tag{135}$$

Dan is

$$\frac{1}{P(is)} \ = \sum_{j=1}^{d}\sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{j,m}}{(is-\lambda_j)^m}.$$

We herinneren ons het voorbeeld bij formule (80) en generaliseren dit een beetje: Zij $\lambda = \alpha + i\beta$ een complex getal met reëel deel $\alpha \neq 0$. Bekijk daarbij de functie f_λ gegeven door

$$\begin{array}{ll} \text{als} \ \ \alpha > 0 \ : & f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t > 0, \\ -e^{\lambda t} & \text{als} \quad t \leq 0, \end{cases} \\ \text{als} \ \ \alpha < 0 \ : & f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t < 0, \\ e^{\lambda t} & \text{als} \quad t \geq 0. \end{cases} \end{array} \tag{136}$$

Dan is zowel voor $\alpha < 0$ als voor $\alpha > 0$

$$(\mathcal{F}f_\lambda)(s) = \frac{1}{is-\lambda}.$$

We herinneren ons ook Formule (92). Alles bij elkaar levert dit voor een geheel getal $m \geq 1$:

$$\mathcal{F}(t^{m-1}f_\lambda)(s) = i^{m-1}(\mathcal{F}f_\lambda)^{(m-1)}(s) = i^{m-1}\left(\frac{d}{ds}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{is-\lambda}\right) = \frac{(m-1)!}{(is-\lambda)^m}$$

Deze formules moeten we toepassen met $\lambda = \lambda_j$ waarbij λ_j een nulpunt is van de bovenstaande veelterm $P(z)$. We kunnen nu onze conclusie formuleren.

Stelling 5.7 *Neem aan dat de veelterm*

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

geen nulpunten heeft op de imaginaire as. Dan is de functie

$$\frac{1}{P(is)} = \frac{1}{(is)^n \ + \ a_{n-1}\,(is)^{n-1} \ + \ldots + \ a_1\,(is) + a_0}$$

de Fouriergetransformeerde van de functie

$$g(t) := \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{m=1}^{m_j} c_{j,m} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right) f_{\lambda_j}(t) \tag{137}$$

met $c_{j,m}$ *als in* (135) *en* $f_{\lambda_j}(t)$ *als in* (136).

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Beschouw nogmaals de differentiaalvergelijking (121)

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u(t)$$

met $u(t) = e^{-|t|}$, die we al in paragraaf 5.2 heebben gezien. De Fouriergetransformeerde van deze vergelijking is

$$((is)^2 + 3is + 2)\widehat{v}(s) = \widehat{u}(s) \ .$$

We weten dat

$$\widehat{u}(s) = \frac{2}{1+s^2} \quad \text{ofwel} \quad \widehat{u}(s) = -\frac{2}{(is-1)(is+1)} \ .$$

Verder geldt $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$. Dus

$$\widehat{v}(s) = -\frac{2}{(is-1)(is+1)^2(is+2)} \ .$$

Met formule (133) uit Voorbeeld 4 in paragraaf 5.3.1 zien we dat

$$-\frac{2}{(is-1)(is+1)^2(is+2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{is-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{is+1} + \frac{1}{(is+1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{is+2} \ .$$

Stelling 5.7 geeft nu meteen

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^t & \text{als} \quad t < 0, \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} & \text{als} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

in overeenstemming met formule (124). $\diamondsuit$

Gelet op de Fourierinversieformule (99) kunnen we ook nog concluderen:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{P(is)}\right)(t) = 2\pi \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{m=1}^{m_j} c_{j,m} \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!} \right) f_{\lambda_j}(-t)\,. \tag{138}$$

$\heartsuit$ **Opmerking.** Het uitsluiten van zuiver imaginaire nulpunten voor $P(z)$ ligt eigenlijk voor de hand. Immers als λ_j zuiver imaginair is, dan is $\frac{1}{is-\lambda_j}$ niet voor alle $s \in \mathbb{R}$ gedefinieerd. $\heartsuit$

5.4 Opgaven

1. (a) Bereken de Fouriergetransformeerde van de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(t) = e^{-|t|}$.

   (b) Geef de breuksplitsing van de rationale functie

   $$\frac{1}{(z^2 - 5z + 6)(z^2 - 1)}.$$

   (c) Bepaal een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

   $$(\mathcal{F}f)(s) = \frac{2}{(s^2 + 5is - 6)(s^2 + 1)}.$$

   (d) Laat zien dat de functie f uit het vorige onderdeel een oplossing is van de differentiaalvergelijking

   $$-f''(t) + 5f'(t) - 6f(t) = e^{-|t|}.$$

   (e) Geef een functie h met Fouriergetransformeerde

   $$(\mathcal{F}h)(s) = \frac{1}{s^2 + 5is - 6}.$$

(f) Bereken het convolutieprodukt $h * g$ van de functies h en g. Controleer of f inderdaad gelijk is aan $h * g$.

2. De functie $u(t)$ wordt gegeven door

$$u(t) = \begin{cases} 4e^t & \text{als} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{als} \quad t \geq 1 \ \text{ of } \ t < 0 \end{cases} .$$

(a) Bereken de Fouriergetransformeerde van u.

(b) Geef een oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$v'' - 2v' + 5v = u(t).$$

6 De Dirac deltafunctie en distributies

De Dirac deltafunctie $\delta(x)$ is een belangrijk hulpmiddel in de fysica. Als een voorbeeld beschouwen we de *klassieke elektrostatica*. Daar is de lading Q die in een domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ zit gegeven door

$$Q = \int_\Omega \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} := \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

waarin $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x,y,z)$ de *ladingsdichtheid* is. Het *elektrostatisch veld* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ voldoet aan de *wetten van Maxwell* [2]:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt dat

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

voor een functie $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ die een *scalaire potentiaal* van het elektrostatisch veld heet. Deze functie voldoet aan de *vergelijking van Poisson*:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\,. \tag{139}$$

Hierin is Δ de *Laplace-operator*: $(\Delta\varphi)(\mathbf{r}) = \text{div grad } \varphi(\mathbf{r})$.

Stel nu dat we slechts één *puntlading* q hebben in het punt $\mathbf{r} = 0$. Welke *ladingsdichtheid* hoort bij deze lading ? In natuurkundige teksten vindt men wel de antwoord:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \tag{140}$$

met de volgende beschrijving:

[2] Voor $\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x,y,z)$ en $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z))^{\mathrm{T}}$ geldt in de Cartesische coordïnaten (x,y,z):

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z},\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}, \\ \Delta\varphi &= \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,. \end{aligned}$$

De functie $\delta(\mathbf{r})$ is overal nul, behalve $\mathbf{r} = 0$, daar is zij oneindig:

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad \mathbf{r} \neq 0\,, \\ \infty & \text{voor} \quad \mathbf{r} = 0\,, \end{cases} \tag{141}$$

maar wel zo dat

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \;=\; 1\,. \tag{142}$$

Zoals bekend, hoort bij de *puntlading* q de *Coulomb potentiaal*

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r}$$

met $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Het blijkt dus dat

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})\,. \tag{143}$$

Verder schrift men

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

waarin δ de *deltafunctie van Dirac* is. Volgens natuurkundige teksten is deze functie overal nul, behalve bij nul, daar is zij oneindig:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad x \neq 0\,, \\ \infty & \text{voor} \quad x = 0\,, \end{cases} \tag{144}$$

maar wel zo dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx \;=\; 1. \tag{145}$$

Functies zoals Dirac's deltafunctie noemt men *gegeneraliseerde functies.*

Wiskundigen hebben als kritiek op deze "definitie" dat *een functie een voorschrift hoort te zijn dat aan getallen getallen toevoegt* (getallen in $\mathbb{R}$, zeg), maar dat ∞ niet kwalificeert als een getal en daarom niet als functiewaarde kan worden gebruikt. De vraag nu is: Hoe kunnen we de formules zoals (140) en (143) op een wiskundig verantwoorde manier interpreteren en gebruiken?

Men kan proberen de Dirac deltafunctie te introduceren met een *limietovergang.* Bijvoorbeeld, neem $\varepsilon > 0$ en beschouw de stuksgewijs continue functie $\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{voor} \quad |x| \leq \varepsilon\,, \\ 0 & \text{voor} \quad |x| > \varepsilon\,. \end{cases} \tag{146}$$

Het is duidelijk dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\, dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \frac{1}{2\varepsilon}\, 2\varepsilon = 1\,.$$

Dus

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

in overeenstemming met (145), terwijl

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \neq 0, \\ \infty & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Natuurkundigen zeggen dat *de functie* $\delta_\varepsilon(x)$ *convergeert naar de deltafunctie* $\delta(x)$ *als* $\varepsilon \downarrow 0$*.*

Voor een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geldt dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)\, dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\, dx = \frac{1}{2\varepsilon}\, f(\xi) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \frac{1}{2\varepsilon}\, f(\xi)\, 2\varepsilon = f(\xi),$$

waarbij $\xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Dus

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)\, dx = f(0)\,,$$

omdat f continu is en $\xi \to 0$ als $\varepsilon \downarrow 0$. Het blijkt dus dat voor een willekeurige continue functie f geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx \;=\; f(0). \tag{147}$$

6.1 Definities en voorbeelden

In deze laatste formule (147) vinden we de oplossing voor het probleem met de wiskundige correctheid:

De Dirac deltafunctie is geen functie maar definieert het voorschrift dat aan een functie f *het getal* $f(0)$ *toevoegt.*

Definitie 6.1 Een voorschrift $\mathcal{D}$ dat aan iedere functie f uit een verzameling functies V een getal $\mathcal{D}(f)$ toevoegt heet een *functionaal* op V. Een functionaal is dus een afbeelding $\mathcal{D} : V \to \mathbb{R}$.

Definitie 6.2 De functionaal $\mathcal{D}_\delta(f) := f(0)$ heet de *deltafunctionaal van Dirac.*

Hier zijn nog enkele voorbeelden van functionalen:

$\diamondsuit$ **Voorbeelden**

1. Voor ieder punt $a \in \mathbb{R}$ hebben we de functionaal die aan een functie zijn waarde in a toevoegt:

   $$f \mapsto f(a)\,.$$

   Deze functionaal is gedefinieerd op de verzameling V van alle functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Er is de functionaal die aan een functie het getal $\lim_{x\to\infty} f(x)$ toevoegt:

   $$f \mapsto \lim_{x\to\infty} f(x)\,.$$

   Deze functionaal is alleen gedefinieerd op de verzameling V van functies f waarvoor de genoemde limiet bestaat.

3. Voor ieder punt $a \in \mathbb{R}$ hebben we de functionaal die aan een functie f de waarde van zijn afgeleide in a toevoegt:

   $$f \mapsto f'(a)\,.$$

   Deze functionaal is alleen gedefinieerd op de verzameling V van functies f die in a differentieerbaar zijn.

4. Voor iedere stuksgewijs continue functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hebben we de functionaal die aan een functie f de waarde van de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ toevoegt:

   $$f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,. \tag{148}$$

   Deze functionaal is alleen gedefinieerd op de verzameling V van stuksgewijs continue functies f waarvoor de genoemde oneigenlijke integraal convergeert.

5. Voor iedere stuksgewijs continue functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hebben we de functionaal die aan een functie f de waarde van de oneigenlijke integraal $-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$ toevoegt:
$$f \mapsto -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx\,.$$
Deze functionaal is gedefinieerd op de verzameling van functies f die stuksgewijs continu differentieerbaar zijn en waarvoor de genoemde oneigenlijke integraal convergeert.

6. Er is de functionaal die aan een functie f het getal
$$\lim_{a\downarrow 0}\int_{|x|>a}\frac{f(x)}{x}\,dx = \lim_{a\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-a}\frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{a}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx\right)$$
toevoegt. Deze functionaal is alleen gedefinieerd op de verzameling V van functies f waarvoor de genoemde oneigenlijke integralen en limieten bestaan. $\diamondsuit$

Uit de voorbeelden blijkt dat voor een functionaal $\mathcal{D}$ zijn "definitiegebied" V belangrijk is. We zullen vaak nemen
$$V = \mathcal{C}\,,$$
de verzameling van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zo dat iedere functie f willekeurig vaak differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en zo dat f gelijk aan nul is buiten een gesloten interval. Merk op dat zulke functies bestaan. Neem, bijvoorbeeld, de functie
$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) & \text{voor} \quad |x| < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{voor} \quad |x| \geq \varepsilon\,. \end{cases}$$
Dan is $\omega_\varepsilon \in \mathcal{C}$ voor elke $\varepsilon > 0$. Een belangrijke feit is dat *alle functionalen in voorbeelden* $1 - 6$ *goed gedefinieerd zijn op* $\mathcal{C}$.

De verzameling functies $V = \mathcal{C}$ is een *lineaire ruimte*, d.w.z. elke lineaire combinatie van twee functies uit V zit ook in V.

Definitie 6.3 Een functionaal $\mathcal{D} : V \to \mathbb{R}$ op een lineaire ruimte V heet *lineair* als
$$\mathcal{D}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\mathcal{D}(f_1) + \lambda_2\mathcal{D}(f_2)$$

voor alle $f_{1,2} \in V$ en alle $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Het is duidelijk dat *alle functionalen in voorbeelden* $1-6$ *lineaire functionalen zijn op* $\mathcal{C}$.

Definitie 6.4 Een lineaire functionaal $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ heet een *distributie.*

♡ **Opmerking.** In veel wiskundige teksten is het ook gebruikelijk om een *convergentie* $f_n \to f$ in $\mathcal{C}$ te definiëren en te eisen dat iedere distributie $\mathcal{D}$ een *continue afbeelding* is op $\mathcal{C}$, d.w.z. $\mathcal{D}(f_n) \to \mathcal{D}(f)$ als $f_n \to f$ in $\mathcal{C}$. Dat is weliswaar nodig maar een finesse van de distributietheorie waar we ons in dit diktaat niet druk om maken. ♡

Laten we de distributie (148) in voorbeeld 4 nog eens nader bekijken. Dit soort distributies komt zo vaak voor dat ze een speciale naam hebben.

Definitie 6.5 Zij $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue functie. De distributie $\mathcal{D}_\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\mathcal{D}_\varphi(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{149}$$

heet de *reguliere distributie die bij de functie* φ *hoort.*

Bij iedere stuksgewijs continue functie φ hoort dus haar eigen reguliere distributie.

Het is dit voorbeeld, dat ertoe leidt om de Dirac deltadistributie $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ met de functienotatie $\delta(x)$ als een integraal te schrijven:

$$\mathcal{D}_\delta(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx\,.$$

Deze uitdruking levert dan een brug tussen correcte definitie (linkerlid, gelijk aan $f(0)$) en handige notatie (rechterlid). Met deze formule schrijft men een niet-reguliere (*singuliere*) distributie alsof hij regulier is.

6.2 Afgeleide distributies

Om te beginnen, beschouwen we een continu differentieerbare functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bij deze functie hoort de reguliere distributie op $\mathcal{C}$

$$f \mapsto \mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Omdat voor iedere $f \in \mathcal{C}$ er een $R > 0$ bestaat zodat $f(x) = 0$ én $f'(x) = 0$ als $|x| \geq R$, geeft partiële integratie

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= [f(x)\varphi(x)]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \underbrace{f(R)}_{0}\varphi(R) - \underbrace{f(-R)}_{0}\varphi(-R) - \int_{-R}^{R} f'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Dus is de reguliere distributie behorend bij de afgeleide functie φ' gelijk aan de distributie

$$f \mapsto -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx\ ,$$

ofwel

$$\mathcal{D}_{\varphi'}(f) = -\mathcal{D}_{\varphi}(f') \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Deze formule leidt tot de volgende definitie:

Definitie 6.6 Zij $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ een distributie. Dan definiëren we de *afgeleide distributie* $\mathcal{D}' : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ door

$$\mathcal{D}'(f) := -\mathcal{D}(f') \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}. \tag{150}$$

Merk op dat $f \in \mathcal{C} \Rightarrow f' \in \mathcal{C}$, zodat het rechterlid van (6.6) goed gedefinieerd is. Voor de reguliere distributie $\mathcal{D}_{\varphi}$, die bij een continu differentieerbare functie φ hoort, geldt dus gewoon

$$\mathcal{D}'_{\varphi}(f) = \mathcal{D}_{\varphi'}(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}. \tag{151}$$

Maar Definitie 6.6 werkt ook voor *singuliere* distributies, zoals de deltadistributie van Dirac, en voor reguliere distributies, die bij *stuksgewijs* continu differentieerbare functies horen. Bovendien kunnen we (151) gebruiken om *gegeneraliseerde afgeleiden* van de Dirac deltafunctie $\delta(x)$ en van stuksgewijs continu differentieerbare functies te definiëren.

$\diamondsuit$ Voorbeelden

1. De afgeleide $\mathcal{D}'_\delta$ van Dirac's distributie $f \mapsto \mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ is de distributie
$$f \mapsto -f'(0)\,.$$
Dus
$$\mathcal{D}'_\delta(f) = -f'(0) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}. \tag{152}$$
Schrijven we formeel $\mathcal{D}'_\delta(f) \equiv \mathcal{D}_{\delta'}(f)$, dan krijgen we
$$\mathcal{D}_{\delta'}(f) = -f'(0)$$
ofwel de volgende fraaie formule
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\,dx = -f'(0),$$
die precies dezelfde betekent als (152): *De afgeleide van de Dirac delta-distributie is gelijk aan de distributie* $f \mapsto -f'(0)$.

   Algemener, voor $a \in \mathbb{R}$ is de afgeleide van de distributie $f \mapsto f(a)$ de distributie $f \mapsto -f'(a)$.

2. De zogenaamde *stapfunctie van Heaviside* is gedefinieerd door
$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x < 0, \\ 1 & \text{als} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{153}$$
Bij H hoort de reguliere distributie op $\mathcal{C}$
$$f \mapsto \mathcal{D}_H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$
De afgeleide van deze distributie wordt dan gegeven door
$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_H(f) &= -\mathcal{D}_H(f') = -\int_0^{\infty} f'(x)\,dx \\ &= -\int_0^{R} f'(x)\,dx = -[f(x)]_0^R \\ &= -[\underbrace{f(R)}_{0} - f(0)] = f(0), \end{aligned}$$

waarin $R > 0$ zó dat $f(x) = 0$ en $f'(x) = 0$ voor alle $x \geq R$. Dus

$$\mathcal{D}'_H(f) = f(0).$$

Hierin is het rechterlid de deltadistributie $\mathcal{D}_\delta$. We zien dus dat

$$\mathcal{D}'_H(f) = \mathcal{D}_\delta(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}. \tag{154}$$

Schrijven we formeel $\mathcal{D}'_H(f) \equiv \mathcal{D}_{H'}(f)$, dan geldt

$$\mathcal{D}_{H'}(f) = \mathcal{D}_\delta(f)$$

ofwel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H'(x)\;dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\;dx$$

waaruit blijkt dat

$$H'(x) = \delta(x).$$

Deze formule betekent niks anders dan (154): *De afgeleide van de distributie die hoort bij Heaviside's functie H is Dirac's deltadistributie.*

3. Bekijk een stuksgewijs continu differentieerbare functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met één sprong in $x = a \in \mathbb{R}$. Beschouw de bijbehorende reguliere distributie op $\mathcal{C}$

$$f \mapsto \mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

De afgeleide van deze distributie wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\varphi(f) &= -\mathcal{D}_\varphi(f') \;=\; -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\left(\int_{-R}^{a} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{a}^{R} f'(x)\varphi(x)\,dx\right) \\
&= -\Bigg(\lim_{\xi\uparrow a}[f(x)\varphi(x)]_{-R}^{\xi} - \int_{-R}^{a} f(x)\varphi'(x)\,dx + \\
&\qquad \lim_{\xi\downarrow a}[f(x)\varphi(x)]_{\xi}^{R} - \int_{a}^{R} f(x)\varphi'(x)\,dx\Bigg) \\
&= -f(a)\varphi(a^-) + f(a)\varphi(a^+) + \int_{-R}^{R} f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= \big(\varphi(a^+) - \varphi(a^-)\big)\,f(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Dus

$$\mathcal{D}'_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\varphi'}(f) + \big(\varphi(a^+) - \varphi(a^-)\big)\, f(a). \tag{155}$$

We zien dat dan de afgeleide van de distributie die hoort bij de stuksgewijs continue-differentieerbare functie φ gelijk is aan de reguliere distributie die hoort bij de functie φ' plus de singuliere distributie $f \mapsto f(a)$ vermenigvuldigd met de grootte van de sprong van φ in a.

4. Bekijk een gesloten interval $[a,b]$ en een functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die continu differentieerbaar is op $[a,b]$ en die constant 0 is op $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Bij deze functie φ hoort de reguliere distributie op $\mathcal{C}$:

$$f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx.$$

De afgeleide van deze distributie wordt dan gegeven door

$$f \mapsto -\int_a^b f'(x)\varphi(x)\, dx \;=\; f(a)\varphi(a) - f(b)\varphi(b) + \int_a^b f(x)\varphi'(x)\, dx.$$

Dus de afgeleide van de distributie die hoort bij de functie φ is de som van de singuliere distributie

$$f \mapsto f(a)\varphi(a) - f(b)\varphi(b)$$

en de reguliere distributie

$$f \mapsto \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx\,,$$

die hoort bij de stuksgewijs continue functie φ'. $\diamondsuit$

6.3 Operaties met distributies

Voor iedere distributie $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ kunnen we nog twee nieuwe distributies definiëren: het produkt $\eta\mathcal{D}$ met een functie η en de lineair-getransformeerde substitutie $\tilde{\mathcal{D}}$.

Neem een willekeurig vaak differentieerbare functie $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ en beschouw een reguliere distributie op $\mathcal{C}$ die bij een stuksgewijs continue $\varphi(x)$ functie hoort:

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx\,.$$

Bij het product $(\eta\varphi)(x) = \eta(x)\varphi(x)$ hoort de distributie

$$\mathcal{D}_{\eta\varphi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\eta(x)\varphi(x)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\eta(x)f(x)]\varphi(x)\, dx = \mathcal{D}_{\varphi}(\eta f)\,.$$

Merk op dat $\eta f \in \mathcal{C}$ voor elke $f \in \mathcal{C}$. Dus bestaan de integralen en geldt

$$\mathcal{D}_{\eta\varphi}(f) = \mathcal{D}_{\varphi}(\eta f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Deze formule leidt tot de volgende definitie:

Definitie 6.7 Zijn $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ een distributie en $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Dan definiëren we het *product* $(\eta\mathcal{D}) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ door

$$(\eta\mathcal{D})(f) := \mathcal{D}(\eta f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}. \tag{156}$$

Voor de reguliere distributie $\mathcal{D}_{\varphi}$, die bij een stuksgewijs continue functie φ hoort, geldt dus gewoon

$$(\eta\mathcal{D}_{\varphi})(f) = \mathcal{D}_{\eta\varphi}(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

♢ **Voorbeeld.** Laat $\mathcal{D}_{\delta} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ de deltadistributie van Dirac zijn: $\mathcal{D}_{\delta}(f) = f(0)$. Voor $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ geldt volgens Definitie 6.7 dat

$$(\eta\mathcal{D}_{\delta})(f) = \mathcal{D}_{\delta}(\eta f) = \eta(0)f(0) = \eta(0)\mathcal{D}_{\delta}(f)\,.$$

Schrijven we formeel $(\eta\mathcal{D}_{\delta})(f) \equiv \mathcal{D}_{\eta\delta}(f)$ dan volgt

$$\mathcal{D}_{\eta\delta}(f) = \eta(0)\mathcal{D}_{\delta}(f)\,.$$

Met de integraalrepresentatie van de deltadistributie $\mathcal{D}_{\delta}$, krijgen we zo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\eta(x)\delta(x)\, dx = \eta(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx$$

ofwel

$$\eta(x)\delta(x) = \eta(0)\delta(x)\,.$$

Deze formule is equivalent met

$$(\eta\mathcal{D}_{\delta})(f) = \eta(0)\mathcal{D}_{\delta}(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

$\diamondsuit$

Beschouw nog eens een reguliere distributie op $\mathcal{C}$ die bij een stuksgewijs continue φ functie hoort:

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$$

en definieer een functie $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(ax - b),$$

waarin $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$, d.w.z. maak een lineaire (affiene) substitutie in φ. De functie $\tilde{\varphi}$ is stuksgewijs continu. De reguliere distributie op $\mathcal{C}$ die bij $\tilde{\varphi}$ hoort is

$$\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(ax - b)\, dx\,.$$

De substitutie $y = ax - b$ in deze integraal geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(ax - b)\, dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y+b}{a}\right)\varphi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \utilde{f}(y)\varphi(y)\, dy$$

waarbij

$$\utilde{f}(y) := \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y+b}{a}\right), \quad y \in \mathbb{R}\,. \tag{157}$$

We hebben dus

$$\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}(f) = \mathcal{D}_\varphi(\utilde{f}) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Deze formule leidt tot de volgende definitie:

Definitie 6.8 Zijn $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ een distributie en $y = ax - b$ een lineaire (affiene) transformatie. Dan definiëren we de *lineair-getransformeerde distributie* $\tilde{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ door

$$\tilde{\mathcal{D}}(f) := \mathcal{D}(\utilde{f}) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}, \tag{158}$$

waarin $\utilde{f}$ is gedefinieerd door (157).

Voor de reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$, die bij een stuksgewijs continue functie φ hoort, geldt dus gewoon

$$\tilde{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

♢ **Voorbeeld.** Laat $\mathcal{D}_\delta : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ de deltadistributie van Dirac zijn: $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$. Volgens Definitie 6.8 geldt dan dat

$$\tilde{\mathcal{D}}_\delta(f) = \mathcal{D}_\delta(\underset{\sim}{f}) = \underset{\sim}{f}(0) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{b}{a}\right).$$

Schrijven we formeel $\tilde{\mathcal{D}}_\delta(f) \equiv \mathcal{D}_{\tilde{\delta}}(f)$, dan geldt

$$\mathcal{D}_{\tilde{\delta}}(f) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{b}{a}\right)$$

ofwel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax-b)\,dx = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{b}{a}\right). \tag{159}$$

Voor $a = 1$ impliceert de laatste formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-b)\,dx = f(b)\,. \tag{160}$$

Merk op dat dit resultaat volgt uit de formele substitutie $y = x - b$ in de integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-b)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+b)\delta(y)\,dy = f(0+b) = f(b).$$

Voor $b = 0$ krijgen we uit (159) dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)\,dx = \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx\,,$$

ofwel

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,.$$

Men kan dus concluderen dat de Dirac deltafunctie *even* is:

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

♢

Met (160) kunnen we de formule (155) herschrijven als

$$[\varphi]'(x) = \varphi'(x) + \big(\varphi(a^+) - \varphi(a^-)\big)\,\delta(x-a).$$

Hierin is $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue differentieerbare functie met één sprong in $x = a$, is $\varphi'(x)$ de afgeleide van φ, die een stuksgewijs continue functie is, en is $[\varphi]'(x)$ de *gegeneraliseerde afgeleide* van φ, waarmee we kunnen schrijven

$$\mathcal{D}'_\varphi(f) = \mathcal{D}_{[\varphi]'}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \big(\varphi'(x) + (\varphi(a^+) - \varphi(a^-))\delta(x-a)\big)\, dx\,.$$

Toch schrijft men meestaal gewoon φ' in plaats van $[\varphi]'$.

6.4 Fouriergetransformeerde distributies

In de *quantummechanica* is het gebruikelijk om de basisfuncties

$$\psi_k(x) = e^{ikx}$$

te "normaliseren naar de delta-functie", d.w.z. te eisen

$$\langle \psi_k | \psi_{k'} \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_k(x)} \psi_{k'}(x)\, dx = 2\pi\delta(k - k')\,.$$

Wegens

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_k(x)} \psi_{k'}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{ik'x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k')x}\, dx\,,$$

is dit equivalent met

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, dx = 2\pi\delta(k)\,. \tag{161}$$

Om deze vreemde formule te interpreteren, gaan we nu kijken naar de Fouriertransformatie van distributies.

Voor een twee keer continu differentieerbare complexwaardige functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met absoluut integreerbare f, f' en f'' geldt

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx}\, dx\,, \tag{162}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{ixs}\, ds \tag{163}$$

(zie Stelling 4.12 en de opmerking daarna). Dit klopt dus voor iedere $f \in \mathcal{C}$, de lineaire ruimte van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zo dat iedere functie f willekeurig vaak differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en zo dat iedere functie f gelijk aan nul is buiten een gesloten interval. Helaas, impliceert $f \in \mathcal{C}$ *niet* dat $\widehat{f} \in \mathcal{C}$. Ten eerste, is $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Ten tweede, kunnen we niet garanderen dat $\widehat{f}(s) = 0$ voor $|s| \geq R$ met een $R > 0$.

Om de Fouriertransformatie van distributies te definiëren, neemt men

$$V = \mathcal{S}\,,$$

waarin $\mathcal{S}$ een verzameling functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is zo dat iedere functie f willekeurig vaak differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en zo dat voor iedere functie geldt

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^m}\right) \qquad \text{als} \quad x \to \pm\infty$$

voor alle $n, m \in \mathbb{N}$. De verzameling $\mathcal{S}$ is een lineaire ruimte. Merk op dat $f_\varepsilon \in \mathcal{S}$ voor elke $\varepsilon > 0$, waarbij

$$f_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon x^2} \qquad \text{voor} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zonder bewijs vermelden we dat voor elke $f \in \mathcal{S}$ geldt $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

Definitie 6.9 Een lineaire functionaal $\mathcal{D} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ heet een *getemperde distributie.*

Bij een begrensde stuksgewijs continue functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ hoort de *reguliere* getemperde distributie $\mathcal{D}_\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\mathcal{D}_\varphi(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Als de functie φ bovendien absoluut integreerbaar is, dan bestaat $\widehat{\varphi}$ en geldt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)e^{-isx}\,ds\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx\right) ds \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\varphi(s)\,ds \\
&= \mathcal{D}_\varphi(\widehat{f}\,)\,.
\end{aligned}$$

Dus

$$\mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f) = \mathcal{D}_\varphi(\widehat{f}\,) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}\,.$$

Deze formule leidt tot de volgende definitie.

Definitie 6.10 Zij $\mathcal{D} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ een getemperde distributie. Dan definiëren we de *Fouriergetransformeerde distributie* $\widehat{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ door

$$\widehat{\mathcal{D}}(f) := \mathcal{D}(\widehat{f}\,) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}\,. \tag{164}$$

Deze definitie werkt ook voor *singuliere* getemperde distributies, maar ook voor reguliere getemperde distributies, die bij begrensde maar *niet-absoluut integreerbaare* functies horen. Daarmee kunnen we voor deze functies de *gegeneraliseerde Fouriertransformatie* definiëren.

♢ **Voorbeelden**

1. De delta-functionaal van Dirac $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ is een getemperde distributie. Dus, volgens Definitie 6.10:

$$\widehat{\mathcal{D}}_\delta(f) = \mathcal{D}_\delta(\widehat{f}\,) = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Definiëren we

$$\mathcal{D}_1(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

dan geldt

$$\widehat{\mathcal{D}}_\delta(f) = \mathcal{D}_1(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}\,.$$

Als we $\widehat{\mathcal{D}}_\delta(f) \equiv \mathcal{D}_{\widehat{\delta}}(f)$ formeel schrijven, dan is

$$\mathcal{D}_{\widehat{\delta}}(f) = \mathcal{D}_1(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}$$

ofwel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{\delta}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds\,.$$

Hieruit volgt

$$\widehat{\delta}(s) = 1. \tag{165}$$

Men kan deze formule ook verkrijgen met de volgende formele berekening:

$$\widehat{\delta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-isx}\,dx = e^{-is0} = 1,$$

die nog een keer de handigheid van de functienotatie $\delta(x)$ illustreert.

2. Omgekeerd, zien we dat voor de reguliere getemperde distributie $\mathcal{D}_1 : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$,
$$\mathcal{D}_1(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$
die bij de (*niet absoluut-integreerbare*) functie $\varphi(x) = 1(x) \equiv 1$ hoort, geldt
$$\widehat{\mathcal{D}}_1(f) = \mathcal{D}_1(\widehat{f}\,) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\,ds = 2\pi f(0)\,.$$
We brengen daarbij in herinnering de Fourierinversie formule (163) in het punt $x = 0$:
$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{i0s}\,ds\,.$$
Dus
$$\widehat{\mathcal{D}}_1(f) = 2\pi\mathcal{D}_\delta(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}\,,$$
waarin $\mathcal{D}_\delta$ de deltadistributie van Dirac is. Schrijven we formeel $\widehat{\mathcal{D}}_1(f) \equiv \mathcal{D}_{\widehat{1}}(f)$, dan blijkt dat
$$\mathcal{D}_{\widehat{1}}(f) = 2\pi\mathcal{D}_\delta(f)$$
ofwel
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{1}(x)\,dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx.$$
Dit verleidt ons tot het schrijven van de formule
$$\widehat{1}(x) = 2\pi\delta(x)$$
ofwel de formule
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,ds = 2\pi\delta(x)\,, \tag{166}$$
die equivalent is met (161). $\diamondsuit$

Tenslotte bespreken we de relaties tussen de Fouriergetransformeerde distributies en hun afgeleiden.

Zoals bekend, geldt voor $f \in \mathcal{S}$ dat
$$\widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x) \qquad \text{en} \qquad (\widehat{f}\,)'(s) = -i\widehat{(xf)}(s).$$

Neem een getemperde distributie $\mathcal{D} : S \to \mathbb{C}$. Dan geldt voor elke $f \in \mathcal{S}$ dat $f', \widehat{f}, xf \in \mathcal{S}$. Verder hebben we

$$\begin{aligned} (x\mathcal{D})(f) &= \mathcal{D}(xf), \\ \mathcal{D}'(f) &= -\mathcal{D}(f'), \\ \widehat{\mathcal{D}}(f) &= \mathcal{D}(\widehat{f}\,). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$(\widehat{\mathcal{D}})'(f) = -\widehat{\mathcal{D}}(f') = -\mathcal{D}(\widehat{f'}) = -\mathcal{D}(ix\widehat{f}\,) = -i(x\mathcal{D})(\widehat{f}\,) = -i\widehat{(x\mathcal{D})}(f)\,,$$

zodat

$$(\widehat{\mathcal{D}})'(f) = -i\widehat{(x\mathcal{D})}(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}\,. \tag{167}$$

Op gelijkwaardige manier krijgen we

$$(\widehat{\mathcal{D}'})(f) = \mathcal{D}'(\widehat{f}\,) = -\mathcal{D}((\widehat{f}\,)') = -\mathcal{D}(-i\widehat{xf}) = i\mathcal{D}(\widehat{xf}) = i\widehat{\mathcal{D}}(xf) = (ix\widehat{\mathcal{D}})(f)\,,$$

zodat

$$(\widehat{\mathcal{D}'})(f) = (ix\widehat{\mathcal{D}})(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{S}\,. \tag{168}$$

6.5 Distributies en differentiaalvergelijkingen

Zoals we al weten, kunnen sommige mechanische en elektrische systemen worden gemodelleerd met een differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t)\,. \tag{169}$$

Het *uitgangssignaal* $v(t)$ is een onbekende functie, terwijl het *ingangssignaal* $u(t)$ een gegeven functie is, en a_0 en a_1 zijn reële constanten die relevante eigenschappen van het systeem weergeven.

In natuurkundige teksten vindt men de volgende methode om een speciale oplossing $v(t)$ van (169) te vinden als $u(t)$ is gegeven. Herschrijf de vergelijking als

$$(Lv)(t) = u(t) \tag{170}$$

waarin

$$(Lv)(t) := v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) \tag{171}$$

een *lineaire differentiaaloperator* is. Stel dat een functie G bekend is die aan de differentiaalvergelijking

$$(LG)(t) = \delta(t) \tag{172}$$

voldoet (met de Dirac deltafunctie in plaats van u). Deze functie G heet dan de *functie van Green* voor L. We hebben

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\delta(s-t)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)\delta(t-s)\,ds$$

zodat de functie $u(t)$ een 'continue lineaire combinatie' is van de δ-impulsen gelokaliseerd in alle $s = t$. De vergelijking (172) impliceert dat

$$(LG)(t-s) = \delta(t-s)$$

ofwel dat $G(t-s)$ het uitgangssignaal is dat bij het ingangssignaal $\delta(t-s)$ hoort. Het ingangssignaal $u(s)\delta(t-s)$ leidt dan tot het uitgangssignaal $u(s)G(t-s)$. Omdat de differentiaalvergelijking (170) lineair is, moet het totale uitgangssignaal de lineaire combinatie van deze signalen zijn:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)G(t-s)\,ds\,.$$

De laatste integraal is gelijk aan het convolutieprodukt

$$(u * G)(t) = (G * u)(t)$$

gedefinieerd in Hoofdstuk 5. Op deze manier concludeert men dat het convolutieprodukt v van de functie van Green G met het ingangssignaal u,

$$v(t) = (G * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s)u(t-s)\,ds\,, \tag{173}$$

een speciale oplossing is van (169). Om deze formele berekeningen te rechtvaardigen en de functies van Green te vinden, gaan we nu kijken naar de differentiaalvergelijkingen voor distributies.

We beginnen met een generalisatie van het begrip 'oplossing' van een differentiaalvergelijking.

Definitie 6.11 Een tweemaal continu differentieerbare functie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet een *klassieke oplossing* van $Lv = u$ met een continue functie u als

$$(Lv)(x) = u(x) \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}. \tag{174}$$

Laat v een klassieke oplossing zijn. Neem $f \in \mathcal{C}$ en bereken de integraal van het product van f met het linker- en het rechterlid van (174). Dit geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(Lv)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(x)\,dx\,.$$

Verder geldt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(Lv)(x)\,dx \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(v''(x) + a_1 v'(x) + a_0 v(x))dx \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)v''(x)\,dx + a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)v'(x)\,dx + a_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)v(x)\,dx \\
&\qquad = \mathcal{D}_{v''}(f) + a_1\mathcal{D}_{v'}(f) + a_0\mathcal{D}_v(f) \;=\; \mathcal{D}_v''(f) + a_1\mathcal{D}_v'(f) + a_0\mathcal{D}_v(f)
\end{aligned}$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(x)\,dx = \mathcal{D}_u(f)\,.$$

Definiëren we voor een distributie $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$(L\mathcal{D})(f) := \mathcal{D}''(f) + a_1\mathcal{D}'(f) + a_0\mathcal{D}(f)\,,$$

dan geldt $(L\mathcal{D}_v)(f) = \mathcal{D}_u(f)$ voor iedere $f \in \mathcal{C}$ en elke klassieke oplossing v. Merk op dat $\mathcal{D}_u(f)$ goed gedefinieerd is voor alle stuksgewijs continue functies u.

Definitie 6.12 Een functie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet een *gegeneraliseerde oplossing* van $Lv = u$ met een stuksgewijs continue functie u als

$$(L\mathcal{D}_v)(f) = \mathcal{D}_u(f) \qquad \text{voor alle } f \in \mathcal{C}. \tag{175}$$

De functie van Green G, die voldoet aan

$$(LG)(x) = \delta(x),$$

kunnen we nu definiëren op een wiskundig verantwoorde manier.

Definitie 6.13 Een functie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet een *functie van Green* van L als

$$(L\mathcal{D}_G)(f) = f(0) \qquad \text{voor alle } f \in \mathcal{C}. \tag{176}$$

Het volgend lemma geeft een expliciete methode om de functie van Green te berekenen.

Lemma 6.14 *Zij w de klassieke oplossing van $Lw = 0$ die voldoet aan*

$$w(0) = 0 \quad \text{en} \quad w'(0) = 1.$$

Dan wordt

$$G(x) = H(x)w(x),$$

waarin H de Heaviside functie is, d.w.z.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \textit{als} \quad x < 0, \\ 1 & \textit{als} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

de functie van Green voor L.

Bewijs: De functie G is continu. Bij deze functie hoort dus de reguliere distributie

$$\mathcal{D}_G(f) = \mathcal{D}_{Hw}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x)w(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)w(x)\,dx\,.$$

De eerste afgeleide van deze distributie is gegeven door

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_G(f) &= -\mathcal{D}_G(f') = -\mathcal{D}_{Hw}(f') = -\int_0^R f'(x)w(x)\,dx \\
&= -\left[f(x)w(x)\right]_0^R + \int_0^R f(x)w'(x)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} f(x)w'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x)w'(x)\,dx = \mathcal{D}_{Hw'}(f).
\end{aligned}$$

Hier is $R > 0$ voldoende groot, zodat $f(x) = f'(x) = 0$ voor alle $x \geq R$. Verder is gebruikt dat $w(0) = 0$.

De tweede afgeleide van $\mathcal{D}_G$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}''_G(f) &= -\mathcal{D}'_G(f') = -\mathcal{D}_{Hw'}(f') = -\int_0^R f'(x)w'(x)\,dx \\
&= -\left[f(x)w'(x)\right]_0^R + \int_0^R f(x)w''(x)\,dx \\
&= f(0)w'(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x)w''(x)\,dx = f(0) + \mathcal{D}_{Hw''}(f)\,,
\end{aligned}$$

omdat $w'(0) = 1$.

Wegens $Lw = 0$ geldt dat

$$\begin{aligned}
(L\mathcal{D}_G)(f) &= \mathcal{D}''_G(f) + a_1\mathcal{D}'_G(f) + a_0\mathcal{D}_G(f) \\
&= f(0) + \mathcal{D}_{Hw''}(f) + a_1\mathcal{D}_{Hw'}(f) + a_0\mathcal{D}_{Hw}(f) \\
&= f(0) + \mathcal{D}_{H(w''+a_1w'+a_0w)}(f) = f(0) + \underbrace{\mathcal{D}_{H(Lw)}(f)}_{0} = f(0)
\end{aligned}$$

ofwel

$$(L\mathcal{D}_G)(f) = f(0) \qquad \text{voor alle } f \in \mathcal{C}.$$

$\square$

$\heartsuit$ **Opmerking.** In het algemeen, is de functie van Green *niet* eenduidig. Inderdaad, voldoet ook de functie

$$G_1(x) = -H(-x)w(x)$$

aan de vergelijking

$$(L\mathcal{D}_{G_1})(f) = f(0) \qquad \text{voor alle } f \in \mathcal{C}\,.$$

Ga dat zelf na! $\heartsuit$

Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling, die zegt dat (173) inderdaad een speciale oplossing van $Lv = u$ levert voor 'nette' ingangsignalen en functies van Green.

Stelling 6.15 *Stel dat het convolutieprodukt $(G * u)(t)$ bestaat en continu is als functie van $t \in \mathbb{R}$ (bijv. als u stuksgewijs continu en absoluut integreerbaar is en G begrensd is). Dan is $v(t) = (G * u)(t)$ een gegeneraliseerde oplossing van de differentiaalvergelijking $Lv = u$.*

♢ **Voorbeeld.** Neem de differentiaalvergelijking $Lv = u$ met

$$(Lv)(t) = v''(t) + 2v'(t) + v(t), \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \ \ t < 0, \\ e^{-t}\cos(t) & \text{als} \ \ t \geq 0. \end{cases}$$

Het ingangssignaal u is een stuksgewijs continu differentieerbaare functie die één sprong heeft.

Eerst berekenen we de functie van Green voor L, waarvoor we de klassieke oplossing van de homogene differentiaalvergelijking

$$w'' + 2w' + w = 0 \tag{177}$$

met $w(0) = 0$ en $w'(0) = 1$ moeten vinden. De karakteristieke veelterm voor deze vergelijking

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

heeft één nulpunt $\lambda_1 = -1$ met multipliciteit $m_1 = 2$. Dus, volgens Appendix 2.A, wordt de algemene oplossing van (177) gegeven door

$$w(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t} = Ae^{-t} + Bte^{-t}$$

met willekeurige $A, B \in \mathbb{R}$. Nemen we $A = 0$ en $B = 1$, dan is

$$w(t) = te^{-t}$$

de enige oplossing van (177) die voldoet aan $w(0) = 0$ en $w'(0) = 1$. We hebben dus de functie van Green gevonden:

$$G(t) = H(t)w(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \ \ t < 0, \\ te^{-t} & \text{als} \ \ t \geq 0. \end{cases}$$

Nu kunnen we een gegeneraliseerde oplossing van $Lv = u$ vinden:

$$v(t) = (G * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s)u(t-s)\,ds = \int_0^{\infty} se^{-s}u(t-s)\,ds\,.$$

Als $t < 0$, dan $u(t-s) \equiv 0$ voor iedere $s \geq 0$ en dus

$$v(t) = 0 \qquad \text{voor} \ \ t < 0.$$

Als $t \geq 0$, dan is $u(t-s) \equiv 0$ voor alle $s > t$ maar

$$u(t-s) = e^{-(t-s)}\cos(t-s) \qquad \text{voor} \ \ 0 \leq s \leq t\,.$$

Hieruit volgt dat voor $t \geq 0$ geldt

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t se^{-s}e^{-(t-s)}\cos(t-s)\,ds = e^{-t}\int_0^t s\cos(t-s)\,ds \\
&= e^{-t}\Big(-\underbrace{[s\ \sin(t-s)]_{s=0}^{s=t}}_{0} + \int_0^t \sin(t-s)\,ds\Big) \\
&= e^{-t}\left[\cos(t-s)\right]_{s=0}^{s=t} = e^{-t}(1-\cos t).
\end{aligned}$$

Dus is

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t < 0, \\ e^{-t}(1-\cos t) & \text{als} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

de gegeneraliseerde oplossing van de vergelijking $Lu = v$. Merk op dat v continu differentieerbaar is, maar dat v'' slechts stuksgewijs continu is.

Controle:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_v(f) &= \int_0^\infty f(t)e^{-t}(1-\cos t)\,dt\,, \\
\mathcal{D}'_v(f) &= -\mathcal{D}_v(f') = -\int_0^\infty f'(t)e^{-t}(1-\cos t)\,dt \\
&= -\left[f(t)e^{-t}(1-\cos t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)(-e^{-t}(1-\cos t) + e^{-t}\sin t)\,dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-t}(\cos t + \sin t - 1)\,dt\,, \\
\mathcal{D}''_v(f) &= -\mathcal{D}'_v(f') = -\int_0^\infty f'(t)e^{-t}(\cos t + \sin t - 1)\,dt \\
&= -\left[f(t)e^{-t}(\cos t + \sin t - 1)\right]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)e^{-t}(1-2\sin t)\,dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-t}(1-2\sin t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Dit geeft

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}''_v(f) + 2\mathcal{D}'_v(f) + \mathcal{D}_v(f) \\
&\qquad = \int_0^\infty f(t)e^{-t}(1 - 2\sin t + 2\cos t + 2\sin t - 2 + 1 - \cos t)\,dt \\
&\qquad = \int_0^\infty f(t)e^{-t}\cos t\,dt \quad = \quad \mathcal{D}_u(f)\,.
\end{aligned}$$

Ga zelf na dat $v(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $(Lv)(t) = u(t)$ puntgewijs voor $t < 0$ en $t > 0$. $\diamondsuit$

♡ **Opmerkingen**

1. Om Stelling 6.15 te bewijzen, moet men het *convolutieprodukt van distributies* definiëren en gebruiken. In deze tekst zullen we ons hiermee niet bemoeien.

2. De hele theorie kan ontwikkeld worden voor n-orde differentiaalvergelijkingen

$$(Lv)(x) = v^{(n)}(x) + a_{n-1}v^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 v'(x) + a_0 v(x) = u(x) \quad (178)$$

met $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{R}$ en een stuksgewijs continue functie u. In dit geval definiëren we voor $f \in \mathcal{C}$

$$(L\mathcal{D})(f) := \mathcal{D}^{(n)}(f) + a_{n-1}\mathcal{D}^{(n-1)}(f) + \cdots + a_1\mathcal{D}'(f) + a_0\mathcal{D}(f)$$

en zeggen – net zoals bij $n = 2$ – dat $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een *gegeneraliseerde oplossing* van (178) is als

$$(L\mathcal{D}_v)(f) = \mathcal{D}_u(f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Deze oplossing is dan steeds gegeven door het convolutie produkt

$$v(x) = (G * u)(x)\,,$$

waarbij de functie van Green gelijk is aan

$$G(x) = H(x)w(x).$$

Hierin is w de klassieke oplossing van $Lw = 0$, die voldoet aan

$$w(0) = w'(0) = \cdots = w^{(n-2)}(0) = 0, \quad w^{(n-1)}(0) = 1.$$

3. In Hoofdstuk 5 hebben we gezien dat een speciale oplossing van (178) geschreven kan worden als

$$v(x) = (g * u)(x)$$

met een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die men kan vinden door de breuksplitsing van

$$\frac{1}{P(z)},$$

waarin

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

de karakteristieke veelterm is van L (zie Stelling 5.7). Daar was een belangrijke conditie op P opgelegd: P mag *geen* zuiver imaginaire nulpunten $i\omega$ hebben. In vele toepassingen hebben al die nulpunten negatieve reële delen (bijv. door wrijving of weerstand in het systeem). Onder deze voorwaarde is de functie van Green G gelijk aan functie g:

$$G(x) = g(x) \qquad \text{voor alle} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Dat is makkelijk te zien voor $n = 2$ wanneer $P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$ met $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan is de formule (115) equivalent met $g(t) = H(t)w(t)$, waarbij

$$w(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) .$$

Deze functie voldoet aan $Lw = 0$ en $w(0) = 0,\ w'(0) = 1$. Als $\lambda_1 = \lambda_2$ dan impliceert Stelling 5.7 dat $g(t) = H(t)w(t)$ met

$$w(t) = te^{\lambda_1 t}$$

zodat $Lw = 0$ en $w(0) = 0,\ w'(0) = 1$.

Merk op dat Lemma 6.14 ook werkt als $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ met $\omega > 0$. Dus kunnen we in dit geval een begrensde functie van Green berekenen met Lemma 6.14 en dan de speciale oplossing $v(t)$ als het convolutieproduct $(G * u)(t)$ schrijven voor iedere stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie u, hoewel de methode van Hoofdstuk 5 hier echt niet van toepassing is (zie opgave 11). ♡

6.6 Sokhotsky's formules

Soms kunnen we singuliere distributies benaderen met reguliere distributies. De Inleiding en opgaven 3–5 laten ons zien dat de deltadistributie $\mathcal{D}_\delta(f) =$

$f(0)$ een limiet is van reguliere distributies $\mathcal{D}_{\delta_\varepsilon}(f)$:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)\,dx = f(0)\,, \tag{179}$$

waarin $\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een geparametriseerde verzameling is van stuksgewijs continue (of stuksgewijs continu differentieerbare) functies, die voldoen aan

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } \; x \neq 0, \\ \infty & \text{voor } \; x = 0 \end{cases}$$

en

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)\,dx = 1 \qquad \text{voor } \; \varepsilon > 0.$$

De limiet in (179) kan formeel herschreven worden als

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)\,dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx$$

zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)\,.$$

In de paragraaf over de Fouriertransformatie van distributies hebben we de volgende formule al gezien:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,dx = 2\pi\delta(s)\,. \tag{180}$$

Nu zullen we deze formule op een andere manier verkrijgen – met een limietovergang. Neem $\varepsilon > 0$ en beschouw de convergente oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}e^{-\varepsilon|x|}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon-is)x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon+is)x}\,dx = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+s^2}\,.$$

Er geldt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+s^2} = \begin{cases} 0 & \text{voor } \; s \neq 0, \\ \infty & \text{voor } \; s = 0, \end{cases}$$

maar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\varepsilon\,ds}{\varepsilon^2+s^2} = 2\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon}\arctan\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = 2\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi\,.$$

Hieruit volgt dat voor elke $f \in \mathcal{S}$ geldt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} e^{-\varepsilon|x|} \, dx \right) ds = 2\pi f(0) \,,$$

die tot (180) leidt.

Men kan ook andere resultaten van de distributietheorie met limietovergangen produceren. Later gebruiken we daarvoor een klassieke stelling, die we zonder bewijs vermelden.

Stelling 6.16 (Arzelà's gedomineerde convergentiestelling) *Zij* $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *een geparametriseerde verzameling van stuksgewijs continue functies, waarvoor:*

- *een stuksgewijs continue functie* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *bestaat zó dat*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) \qquad \text{voor alle} \;\; x \in \mathbb{R};$$

- *een stuksgewijs continue positieve functie* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bestaat zó dat de oneigenlijke integraal*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x\,) \, dx$$

convergeert en $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq h(x)$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$ *en* $\varepsilon > 0$.

Dan is de functie φ *integreerbaar en*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x) \, dx \,.$$

In de *quantumveldentheorie* gebruikt men de *Sokhotsky's formules*:

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + \mathrm{PV}\ \frac{1}{x} \tag{181}$$

en

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathrm{PV}\ \frac{1}{x}\ . \tag{182}$$

Hierin staat PV voor de "hoofdwaarde" (*engels: "principal value"*). De formules (181) en (182) impliceren samen dat

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0}\right).$$

Wat betekenen deze formules?

Zij $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ de distributie die is gedefinieerd door

$$\mathcal{P}(f) \ := \ \lim_{a\downarrow 0} \int_{|x|\geq a} \frac{f(x)}{x}\, dx \ = \ \lim_{a\downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-a} \frac{f(x)}{x}\, dx + \int_{a}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx\right).$$

(zie voorbeeld 6 in paragraaf 6.1). Deze distributie wordt ook de *hoofdwaarde van de integraal* met $\frac{1}{x}$ genoemd en wordt geschreven als

$$\mathcal{P}(f) = \mathrm{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx\,.$$

Vaak schrijft men $\mathcal{P}$ alsof deze distributie regulier is:

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{D}_{\mathrm{PV}\ \frac{1}{x}}(f)\,.$$

Nu kunnen we een stelling bewijzen, die de wiskundige interpretaie van (181) geeft.

Stelling 6.17

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x + i\varepsilon}\, dx = -i\pi f(0) + \mathcal{P}(f) \quad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}. \tag{183}$$

Bewijs:

Voor iedere $f \in \mathcal{C}$ geldt dat $f(x) = 0$ voor alle $|x| \geq R$ als $R > 0$ groot genoeg is. Dus

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x + i\varepsilon}\, dx \quad &= \quad \int_{-R}^{R} \frac{f(x)}{x + i\varepsilon}\, dx \\
&= \quad \int_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\, [f(0) - f(0) + f(x)]\, dx \\
&= \quad f(0)\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\, [f(x) - f(0)]\, dx}_{I_2}.
\end{aligned}$$

De functie

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}$$

is *oneven*, waaruit blijkt dat

$$\int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}\, dx = 0.$$

Dus

$$I_1 = -i\varepsilon \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = -i\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon}\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]_{-R}^{R} = -2i \arctan\left(\frac{R}{\varepsilon}\right),$$

en

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_1 = -i\pi.$$

Verder hebben we $f(x) - f(0) = \mathcal{O}\left(|x|\right)$ als $x \to 0$, waaruit volgt dat de integraal

$$\int_{-R}^{R} \frac{f(x) - f(0)}{x}\, dx$$

bestaat. Bovendien geldt dat

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x + i\varepsilon} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

en

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x + i\varepsilon}\right| = \left|\frac{x}{x + i\varepsilon} \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} \left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right|$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon > 0$. Met Stelling 6.16[3] krijgen we

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-R}^{R} \frac{f(x) - f(0)}{x + i\varepsilon}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{f(x) - f(0)}{x}\, dx.$$

[3]Neem

$$\varphi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x+i\varepsilon} & \text{voor} \quad |x| < R, \\ 0 & \text{voor} \quad |x| \geq R, \end{cases} \qquad \varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{voor} \quad |x| < R, \\ 0 & \text{voor} \quad |x| \geq R, \end{cases}$$

en $h(x) := |\varphi(x)|$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Omdat de laatste integraal convergent is, hebben we

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx \;= \\
&\quad \lim_{a\downarrow 0}\left(\int_{-R}^{-a} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx + \int_{a}^{R} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx\right) \;= \\
&\quad \lim_{a\downarrow 0}\left(\int_{-R}^{-a} \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{a}^{R} \frac{f(x)}{x}\,dx\right) \;-\; f(0)\;\lim_{a\downarrow 0}\left(\int_{-R}^{-a} \frac{dx}{x} + \int_{a}^{R} \frac{dx}{x}\right).
\end{aligned}$$

Maar

$$\int_{-R}^{-a} \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{a}^{R} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-a} \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{a}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

en

$$\int_{-R}^{-a} \frac{dx}{x} + \int_{a}^{R} \frac{dx}{x} = 0,$$

waaruit volgt dat

$$\int_{-R}^{R} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx = \mathcal{P}(f)$$

en dus

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_2 = \mathcal{P}(f)$$

voor elke $f \in \mathcal{C}$. □

De formule (183) kan worden herschreven als

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = -i\pi\mathcal{D}_\delta(f) + \mathcal{D}_{\mathrm{PV}\ \frac{1}{x}}(f)\,,$$

ofwel als de formele uitdrukking (181), die dus equivalent is met (183).

Merk op dat (183) ook geldt voor $f \in \mathcal{S}$, d.w.z. als we $\mathcal{D}_\delta$ en $\mathcal{P}$ als *getemperde distributies* interpreteren. Met de hulp van (183) berekenen we nu de Fouriergetransformeerde van de *Heaviside functie* (153).

Bij de Heaviside functie H hoort de reguliere getemperde distributie

$$\mathcal{D}_H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx\,, \qquad f \in \mathcal{S}\,.$$

De Fouriergetransformeerde distributie daarvan is

$$\widehat{\mathcal{D}}_H(f) = \mathcal{D}_H(\widehat{f}\,) = \int_0^\infty \widehat{f}(s)\,ds\,, \qquad f \in \mathcal{S}\,.$$

De laatste integraal kunnen we formeel herschrijven als

$$\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-isx} f(x)\,dx\right) ds = \int_{-\infty}^\infty f(x) \left(\int_0^\infty e^{-isx}\,ds\right) dx$$

zodat

$$\widehat{\mathcal{D}}_H(f) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\widehat{H}(x)\,dx$$

met

$$\widehat{H}(x) = \int_0^\infty e^{-isx}\,ds\,.$$

Deze integraal is divergent. Toch kunnen we $\widehat{\mathcal{D}}_H(f)$ (en dus de gegeneraliseerde Fouriergetransformeerde $\widehat{H}$) proberen te vinden met een limietovergang. Neem daarvoor de stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie

$$H_\varepsilon(x) := H(x)e^{-\varepsilon x}\,, \qquad \varepsilon > 0.$$

Er geldt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} H_\varepsilon(x) = H(x) \qquad \text{voor elke } \; x \in \mathbb{R}.$$

De Fouriergetransformeerde functie $\widehat{H}_\varepsilon$ is gelijk aan

$$\widehat{H}_\varepsilon(s) = \int_{-\infty}^\infty H_\varepsilon(x)e^{-isx}\,dx = \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+is)x}\,dx = \frac{1}{\varepsilon + is} = -\frac{i}{s - i\varepsilon}\,.$$

Hieruit volgt dat

$$\widehat{\mathcal{D}}_{H_\varepsilon}(f) = \mathcal{D}_{\widehat{H}_\varepsilon}(f) = \int_{-\infty}^\infty f(s)\widehat{H}_\varepsilon(s)\,ds = -i\int_{-\infty}^\infty \frac{f(s)}{s - i\varepsilon}\,ds\,.$$

Sokhotsky's formule (183) geeft

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(s)}{s - i\varepsilon}\,ds = i\pi f(0) + \mathcal{P}(f)\,,$$

waaruit blijkt dat

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \widehat{\mathcal{D}}_{H_\varepsilon}(f) = -i(i\pi f(0) + \mathcal{P}(f)) = \pi f(0) - i\mathcal{P}(f)\,.$$

Stelling 6.16 impliceert dat

$$\widehat{\mathcal{D}}_H(f) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \widehat{\mathcal{D}}_{H_\varepsilon}(f) \qquad \text{voor elke} \;\; f \in \mathcal{S}\,,$$

en dus

$$\widehat{\mathcal{D}}_H(f) = \pi f(0) - i\mathcal{P}(f) \qquad \text{voor elke} \;\; f \in \mathcal{S}\,. \tag{184}$$

Schrijven we formeel

$$\mathcal{P}(f) \equiv \mathcal{D}_{\mathrm{PV}\;\frac{1}{x}}(f), \quad \widehat{\mathcal{D}}_H(f) \equiv \mathcal{D}_{\widehat{H}}(f)$$

en gebruiken $f(0) = \mathcal{D}_\delta(f)$, dan krijgen we de volgende fraaie formule

$$\widehat{H}(x) = \pi\delta(x) - i \;\mathrm{PV}\; \frac{1}{x}\,,$$

die niks anders betekent dan (184).

6.7 Opgaven

1. We gebruiken de Heaviside functie (153). Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn en zij F een primitieve van f, d.w.z. $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Ga na dat voor elke $a > 0$ geldt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{H(x+a) - H(x)}{a}\,dx \;=\; \frac{F(0) - F(-a)}{a}.$$

   (b) Ga na dat

   $$\lim_{a\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{H(x+a) - H(x)}{a}\,dx \;=\; f(0).$$

   (c) Geef met het voorgaande in het achterhoofd een interpretatie aan de formule

   $$\delta(x) = \lim_{a\downarrow 0} \frac{H(x+a) - H(x)}{a}.$$

2. Zij $\mathcal{A}$ de distributie op $\mathcal{C}$ gedefinieerd door de formule

$$\mathcal{A}(f) := \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx.$$

   (a) Bewijs dat
   $$\mathcal{A}'' = 2\mathcal{D}_\delta$$
   waarin $\mathcal{D}_\delta$ Dirac's deltadistributie is.

   (b) Bespreek de formule
   $$\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x).$$

3. Definieer voor $a > 0$ de functie φ_a door

$$\varphi_a(x) = \tfrac{a-|x|}{a^2} \quad \text{als} \quad |x| \leq a\,, \qquad \varphi_a(x) = 0 \quad \text{als} \quad |x| > a\,.$$

   Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie zijn en zij $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zo dat $F''(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\, dx$
   Schrijf de uitkomst in termen van $F(a)$, $F(-a)$, $F(0)$.

   (b) Ga na dat
   $$\lim_{a\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\, dx \;=\; f(0).$$

   (c) Geef met het voorgaande in het achterhoofd een interpretatie aan de formule
   $$\delta(x) = \lim_{a\downarrow 0} \varphi_a(x)$$

4. Laat zien dat de hieronder beschreven functies $\varphi_a(x)$ allemaal de volgende drie eigenschappen hebben:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\downarrow 0} \varphi_a(x) &= 0 \qquad \text{voor elke} \quad x \neq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(x)\, dx &= 1 \qquad \text{voor elke} \quad a > 0 \\
\lim_{a\downarrow 0} \widehat{\varphi}_a(s) &= 1 \qquad \text{voor elke} \quad s \in \mathbb{R};
\end{aligned}$$

   hier is $\widehat{\varphi}_a$ de Fouriergetransformeerde van φ_a.

(a) $$\varphi_a(x) := \frac{H(x+a) - H(x)}{a} \qquad \text{met } H \text{ als in opgave 1.}$$

(b) $$\varphi_a(x) := \frac{a - |x|}{a^2} \quad \text{als } |x| \le a\,, \quad \varphi_a(x) = 0 \quad \text{als } |x| > a\,.$$

(c) $$\varphi_a(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}}$$

(d) $$\varphi_a(x) := \frac{a}{\pi x^2}\left[1 - \cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

(e) $$\varphi_a(x) := \frac{a\pi^{-1}}{x^2 + a^2}$$

5. We definiëren, voor $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, de functies f_a, $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_a(t) = \frac{1}{2a} \quad \text{als} \quad |t| \le a\,, \qquad f_a(t) = 0 \quad \text{als} \quad |t| > a\,.$$

$$\varphi_a(s) = \frac{\sin(a^{-1}s)}{\pi s} \quad \text{als} \quad s \neq 0\,, \qquad \varphi_a(0) = \frac{1}{\pi a}\,.$$

(a) Laat zien dat de Fouriergetransformeerde van $f_{1/a}$ wordt gegeven door
$$\widehat{f_{1/a}}(s) = \pi a \varphi_a(s)$$

(b) Laat m.b.v. de Fourierinversieformule voor de functie $f_{1/a}$ zien dat de limiet $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{-R}^{R} \varphi_a(s)\, ds$ bestaat en gelijk is aan 1.

(c) Merk op dat φ_a een even functie is en leidt uit het vorige onderdeel af dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(s)\, ds$ convergeert en
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(s)\, ds = 1\,.$$

(d) Zij nu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie met de eigenschappen

- $\lim_{x \downarrow 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ en $\lim_{x \uparrow 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ bestaan in $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = 0$
- de functie $\dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ is stuksgewijs continu differentieerbaar
- de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{g(x) - g(0)}{x} \right)' \right| dx$ bestaat

Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(x) \left(g(x) - g(0)\right) dx$ convergeert voor elke $a > 0$ en dat

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(x) \left(g(x) - g(0)\right) dx = 0$$

(e) Laat zien dat voor elke functie g als in het vorige onderdeel geldt

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(x) g(x) \, dx = g(0)$$

en geef daarmee een interpretatie in termen van distributies voor de formule

$$\delta(x) = \lim_{a \downarrow 0} \varphi_a(x)$$

(f) Ga na dat $\lim_{a \downarrow 0} \varphi_a(x)$ voor $x \neq 0$ niet bestaat.
Dit geeft aan dat $\lim_{a \downarrow 0} \varphi_a$ niet bestaat als een functie!

6. Laat $\mathcal{D}$ een distributie op $\mathcal{C}$ en ξ een C^∞-functie. Dan definiëren we de distributie $\xi\mathcal{D}$ door

$$(\xi\mathcal{D})(f) := \mathcal{D}(\xi f) \qquad \text{voor elke} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Bespreek met deze definitie in het achterhoofd de volgende formules

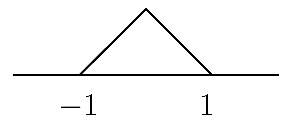
(a) $\quad x\delta(x) = 0$

(b) $\quad x\delta'(x) = -\delta(x)$

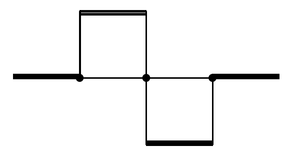
(c) $\qquad (\xi\mathcal{D})' = \xi'\mathcal{D} + \xi\mathcal{D}'$

7. (1) Neem de functies $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{als} \quad |x| < 1; \\ 0 & \text{als} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$



$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad -1 < x < 0 \\ -1 & \text{als} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{als} \quad x = 0 \ \text{ of } \ |x| \geq 1 \end{cases}$$



Bepaal de Fouriergetransformeerden $\widehat{\varphi}$ en $\widehat{\psi}$.

(2) Bij de functies φ en ψ horen de getemperde distributies

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{resp.} \quad \mathcal{D}_\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)\,dx$$

De afgeleiden van deze distributies noteren we als $\mathcal{D}'_\varphi$ resp. $\mathcal{D}'_\psi$.

(a) Laat zien dat $\mathcal{D}'_\varphi = \mathcal{D}_\psi$.

(b) Laat zien dat $\mathcal{D}'_\psi = \mathcal{R}$ waarin de distributie $\mathcal{R}$ gedefineerd is door de formule

$$\mathcal{R}(f) = f(-1) - 2f(0) + f(1).$$

(c) Bereken $\widehat{\mathcal{D}}_\varphi$, $\widehat{\mathcal{D}}_\psi$ en $\widehat{\mathcal{R}}$.

(d) Controleer of je resultaten in het vorige onderdeel inderdaad voldoen aan

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}}_\psi &= ix\widehat{\mathcal{D}}_\varphi \,, \\ \widehat{R} &= ix\widehat{\mathcal{D}}_\psi \,, \end{aligned}$$

waarin de distribitues $x\widehat{\mathcal{D}}_\varphi$ en $x\widehat{\mathcal{D}}_\psi$ gedefineerd zijn als in opgave 6.

8. Beschouw de functie $\varphi(x) = e^{-|x|}$.

(a) Bepaal de Fouriergetransformeerde $\widehat{\varphi}(s)$, d.w.z. bereken

$$\widehat{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\varphi(x)\,dx.$$

(b) Bij de functie φ hoort de reguliere getemperde distributie

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-|x|}\,dx\,.$$

Bereken $\mathcal{D}'_\varphi(f)$ en $\mathcal{D}''_\varphi(f)$.

(c) Laat zien dat voor iedere $f \in \mathcal{S}$ geldt

$$-\mathcal{D}''_\varphi(f) + \mathcal{D}_\varphi(f) = 2f(0). \tag{185}$$

(d) Ga na dat (185) impliceert

$$(x^2+1)\widehat{\mathcal{D}}_\varphi = 2\mathcal{D}_1 \quad \text{ofwel} \quad \widehat{\mathcal{D}}_\varphi = \frac{2}{x^2+1}\mathcal{D}_1.$$

(e) Vergelijk de antwoorden van onderdelen (a) en (d).

9. Bereken $\widehat{\mathcal{D}}_\varphi$ van de reguliere getemperde distributie

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad f \in \mathcal{S},$$

voor

(a) $\varphi(x) = \sin x\,$,

(b) $\varphi(x) = \cos x\,$,

(c) $\varphi(x) = (\cos x)^2$.

Hint: Gebruik de formules van Euler

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

en de Fourierinverse formule.

10. Bereken $\widehat{\mathcal{D}}_\psi$ van de reguliere getemperde distributie

$$\mathcal{D}_\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)\,dx, \qquad f \in \mathcal{S},$$

met $\psi(x) = x\,\sin x$.

Hint: Laat zien dat $\widehat{\mathcal{D}}_\psi(f) = -i\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f')$ met $\varphi(x) = \sin x$. Gebruik daarvoor de formule $\widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$. Dan pas de aantword op onderdeel (a) van de vorige opgave toe.

11. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + v(t) = u(t) \quad \text{met} \quad u(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases} \tag{186}$$

(a) Laat zien dat

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & t \geq 0, \end{cases}$$

de functie van Green van (186) is, d.w.z. de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$G''(t) + G(t) = \delta(t).$$

Hint: De laatste vergelijking betekent dat voor iedere $f \in \mathcal{C}$ geldt

$$\mathcal{D}''_G(f) + \mathcal{D}_G(f) = f(0),$$

waarin $\mathcal{D}_G(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)\,dt$.

(b) Bereken het convolutieprodukt

$$(u * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)G(t-s)\,ds$$

Hint: Beschouw de gevallen $t \leq -\pi$, $|t| < \pi$ en $t \geq \pi$ apart en gebruik de formules van Euler

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

om integralen te berekenen.

(c) Ga na dat de functie

$$v(t) = (u * G)(t)$$

twee keer continu-differentieerbaar is en voldoet aan de differentiaalvergelijking (186) voor $|t| < \pi$ en $|t| > \pi$.

12. Vind een (gegeneraliseerde) oplossing van de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = \delta(t) + \delta(t-1),$$

d.w.z. bepaal een stuksgewijs continu-differentieerbare functie v zodat

$$\mathcal{D}_v''(f) + 2\mathcal{D}_v'(f) + \mathcal{D}_v(f) = f(0) + f(1)$$

voor elke $f \in \mathcal{C}$. Controleer je antwoord.

7 Warmte- en golfvergelijkingen met één ruimtelijke dimensie

Een *partiële differentiaalvergelijking* voor een functie u van n variabelen is een relatie tussen de functie en z'n partiële afgeleiden. Wij beperken ons in eerste instantie tot functies $u(x, t)$ van 2 variabelen (x, t) en tot de volgende twee vergelijkingen

$$\text{de warmtevergelijking:} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{187}$$

$$\text{de golfvergelijking:} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{188}$$

Vaak schrijft men deze vergelijkingen als $u_t = a^2 u_{xx}$ en $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, resp.

De warmtevergelijking (187) beschrijft de temperatuurontwikkeling in een 1-dimensionale staaf: x is de plaatscoördinaat, t is de tijdcoördinaat en u is de temperatuur; $a > 0$ is een materiaalconstante.

De golfvergelijking (188) beschrijft kleine uitwijkingen van een trillende snaar: x is de plaatscoördinaat, t is de tijdcoördinaat en u is de uitwijking; $c > 0$ is een materiaalconstante.

Partiële differentiaalvergelijkingen hebben heel veel oplossingen, maar in de praktijk is men geïnteresseerd in alleen die oplossingen die aan zekere condities, de zgn. *randvoorwaarden en beginvoorwarden* voldoen. In dit hoofdstuk gebruiken we Fourier reeksen en integralen om de partiële differentiaalvergelijkingen (187) en (188) te analyseren in twee gevallen: $x \in [0, L]$ of $x \in \mathbb{R}$. Dan hebben de randvoorwarden betrekking op

$$u(0, t) \;\text{ en }\; u(L, t) \quad \text{of} \quad \lim_{x \to \pm\infty} u(x, t)$$

voor alle t waarvoor de oplossing is gedefiniéerd, terwijl de beginvoorwarden betrekking hebben op

$$u(x, 0) \;\text{ en (voor de golfvergelijking) }\; \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$$

voor alle $x \in [0, L]$ of $x \in \mathbb{R}$.

7.1 De warmtevergelijking op $[0, L]$

Als we de temperatuurontwikkeling in een staaf modelleren, dan is een natuurlijke definitiegebied voor (187)

$$0 \leq x \leq L\,, \qquad t \geq 0$$

waarbij L de lengte van de staaf is. Neem aan dat de temperatuur altijd nul is in de punten met $x = 0$ en $x = L$. We bestuderen dus de warmtevergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{189}$$

voor $0 \leq x \leq L$ en $t \geq 0$ met de volgende rand- en beginvoorwaarden

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \text{voor alle } \; t \geq 0\,, \tag{190}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{voor alle } \; 0 \leq x \leq L\,. \tag{191}$$

Hierin is $g(x)$ een gegeven functie die de initiële temperatuurverdeling aangeeft. We nemen aan dat g continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar is en voldoet aan $g(0) = g(L) = 0$.

Eerst onderzoeken we of er oplossingen zijn van (189) van de vorm

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{192}$$

d.w.z. waarbij u het produkt is van een functie van x alleen en een functie van t alleen. Men noemt deze werkwijze wel de *methode van scheiding van variabelen*.

Merk nu op dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) &= X(x)\dot{T}(t)\,, && \left(\dot{T} := \frac{dT}{dt}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)T(t)) &= X''(x)T(t)\,, && \left(X'' := \frac{d^2X}{dx^2}\right) \end{aligned}$$

en dus wordt de warmtevergelijking

$$X(x)\dot{T}(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

oftewel

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Het rechterlid van deze laatste vergelijking hangt alleen af van x maar niet van t, terwijl het linkerlid alleen afhangt van t en niet van x. Dit kan alleen maar als beide leden constant zijn: d.w.z. als voor een zekere constante λ

$$\dot{T}(t) - a^2\lambda T(t) = 0, \tag{193}$$
$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \tag{194}$$

Hiermee is het probleem teruggebracht tot twee differentiaalvergelijkingen van elk één variabele, die aan elkaar gekoppeld zijn door de constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zoals bekend worden de oplossingen van (193) voor elke λ gegeven door

$$T(t) = Ae^{a^2\lambda t}$$

met een constante $A \in \mathbb{R}$.

Zoals ook bekend worden de oplossingen van (194) voor $\lambda \neq 0$ gegeven door

$$X(x) = Be^{x\sqrt{\lambda}} + Ce^{-x\sqrt{\lambda}} \tag{195}$$

voor zekere constanten B en C. Als $\lambda < 0$ is, is $\sqrt{\lambda}$ een complex getal en zijn ook B en C complex.

Als $\lambda = 0$ worden de oplossingen van (194) gegeven door

$$X(x) = B + Cx \tag{196}$$

met $B, C \in \mathbb{R}$.

Zo hebben we dus talrijke oplossingen voor de differentiaalvergelijking (189). *Welke van deze oplossingen voldoen aan de randvoorwaarde (190)?*

Dan moet dus

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0 \qquad \text{voor alle } t \geq 0\,.$$

Dit betekent dat óf $T(t) = 0$ voor alle $t \geq 0$ óf $X(0) = X(L) = 0$.

Het geval $T(t) = 0$ voor alle $t \geq 0$ leidt tot de triviale oplossing $u(x,t) = 0$ voor alle x, t. Onderzoeken we nu de mogelijkheid $X(0) = X(L) = 0$.

Als $\lambda = 0$ leert (196)

$$B = X(0) = 0 \qquad \text{en} \qquad B + CL = X(L) = 0;$$

dus $B = C = 0$ en $X(x) = 0$ voor alle x. Dit leidt weer tot de triviale oplossing $u(x,t) = 0$ voor alle x, t.

Als $\lambda \neq 0$ leert (195)

$$\begin{aligned} B + C &= X(0) = 0\,, \\ Be^{L\sqrt{\lambda}} + Ce^{-L\sqrt{\lambda}} &= X(L) = 0\,; \end{aligned}$$

dus $B = -C$ en

$$B(e^{L\sqrt{\lambda}} - e^{-L\sqrt{\lambda}}) = 0\,.$$

Uit deze laatste gelijkheid volgt óf $B = 0$ (hetgeen weer leidt tot de triviale oplossing $u(x,t) = 0$ voor alle x, t) óf

$$e^{L\sqrt{\lambda}} - e^{-L\sqrt{\lambda}} = 0;$$

dus

$$e^{2L\sqrt{\lambda}} = 1. \tag{197}$$

Uit de theorie van complexe getallen en e-machten weten we dat (197) impliceert dat

$$2L\sqrt{\lambda} = 2\pi i n$$

voor een geheel getal $n \in \mathbb{Z}$. Dit getal is niet gelijk aan nul (wegens $\lambda \neq 0$). Dus

$$\lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2} = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \qquad \text{voor een geheel getal} \;\; n \neq 0\,. \tag{198}$$

Met deze λ, hebben we

$$T(t) = Ae^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t}$$

en

$$X(x) = B\left(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}}\right) = 2iB\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

waarin $B \in \mathbb{C}$ willekeurig is. Dus voldoet de functie

$$u_n(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \tag{199}$$

zowel aan de differentiaalvergelijking (189) als aan de randvoorwaarde (190). Merk op

$$u_0(x,t) = 0 \qquad \text{en} \qquad u_{-n}(x,t) = -u_n(x,t) \qquad \text{voor alle} \;\; x, t, n.$$

We krijgen nog meer oplossingen van de differentiaalvergelijking (189) die ook voldoen aan de randvoorwaarde (190) door *superposities* (d.w.z. lineaire combinaties) te nemen van de basisfuncties $u_n(x,t)$ (met $n \geq 1$). Zo'n lineaire combinatie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)$$

voldoet ook nog aan beginvoorwaarde (191) precies dan als

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \qquad \text{voor alle} \quad 0 \leq x \leq L,$$

d.w.z. precies dan als we voor de coëfficiënten b_n de Fouriercoëfficiënten nemen van de oneven $2L$-periodieke functie die op het interval $[0, L]$ gelijk is aan de functie g:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \tag{200}$$

Conclusie: *De warmtevergelijking* (189) *met de beginvoorwaarde* (191) *en de randvoorwaarden* (190) *heeft precies één oplossing gegeven door de reeks*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) \tag{201}$$

met $u_n(x,t)$ als in (199) *en b_n als in* (200).

♡ **Opmerkingen**

1. Strikt genomen is deze conclusie enigszins voorbarig, immers gebruik van reeksen moet altijd worden gerechtvaardigd met convergentiebeschouwingen; in dit geval zelfs tot op het niveau van term voor term tweemaal differentiëren van de reeks voor $u(x,t)$ naar x een eenmaal naar t. In het onderhavige geval van de warmtevergelijking klopt dat, omdat de termen in (201) snel dalende functies van n zijn voor iedere stuksgewijs continu differentieerbare functie $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ met $g(0) = g(L) = 0$. Dit impliceert dat de functie $u(x,t)$ gedefiniëerd door (201) willekeurig vaak differentieerbaar is in t en x en voldoet aan de warmtevergelijking (189) en de randvoorwaarde (190) voor $t > 0$. Bovendien voldoet deze functie aan de beginvoorwaarde (191) en geldt

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = g(x) \qquad \text{voor alle} \;\; x \in [0, L].$$

   Wegens de eenduidigheid van de oplossing van het probleem (189), (190) en (191), heeft het geen andere oplossing dan (201).

2. Er is een andere manier om de formule (201) te krijgen. Als $u(x,t)$ een oplossing van (189) is, dan is $-u(-x,t)$ dat ook. Beschouw de lineaire ruimte V van continu en stuksgewijs continu-differentieerbare functies $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, die voldoen aan $f(0) = f(L) = 0$ en

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{voor alle } 0 < x < L\,.$$

Iedere functie $f \in V$ is oneven en kan geschreven worden als de convergente Fourierreeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \qquad \text{voor} \quad x \in [-L, L]$$

met

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx\,.$$

We beschouwen nu de warmtevergelijking (189) met $x \in [-L, L]$ en de beginvoorwaarde

$$u(x,0) = \begin{cases} g(x) & \text{voor} \;\; 0 \le x \le L, \\ -g(-x) & \text{voor} \;\; -L \le x < 0, \end{cases}$$

d.w.z. een oneven functie op $[-L, L]$ die op het deelinterval $[0, L]$ gelijk is aan de functie g.

Omdat de oplossing $u(\cdot, t)$ van (189) op $[-L, L]$ met $u(\cdot, 0) \in V$ in de ruimte V zit voor iedere $t > 0$, geldt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

waarbij de Fouriercoëfficiënten $b_n(t)$ functies van de tijd zijn met $b_n(0) = \widehat{g}_n$ ofwel

$$b_n(0) = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} g(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{202}$$

Dan (met termgewijs differentiëren) geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \\ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left[-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \end{aligned}$$

Deze reeksen moet gelijk zijn, waaruit volgt dat

$$\dot{b}_n(t) = -\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 b_n(t), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{203}$$

Dit is een oneindig stelsel gewone differntiaalvergelijkingen, die we individueel kunnen oplossen:

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t}.$$

Dus hebben we

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

waarin $b_n(0)$ gegeven zijn door (202). Deze formule is equivalent met (201), waarin $u_n(x,t)$ als in (199) en b_n als in (200) zijn.

3. We zoeken dus voor iedere t de oplossing $u(x,t)$ van de warmtevergelijking als een lineaire combinatie van de basisfuncties

$$\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

met coefficiënten die van de tijd afhangen. Deze functies $b_n(t)$ voldoen aan een oneindig-dimensionaal stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen (203). Deze methode werkt in andere gevallen, ook voor niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, waarin men een stelsel van (gekoppelde) niet-lineaire differentiaalvergelijkingen voor $b_n(t)$ krijgt. Om een *benadering* van een oplossing van dit stelsel te krijgen, zet men $b_n(t) \equiv 0$ voor alle voldoende grote n, zeg $n \geq (K+1)$. Dit leidt tot een K-dimensionaal stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen, dat met standaard numerieke methoden geïntegreerd kan worden. ♡

7.2 De golfvergelijking op $[0, L]$

We bestuderen nu de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{204}$$

voor $0 \leq x \leq L$ en $t \geq 0$ met rand- en beginvoorwaarden

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \text{voor alle } \ t \geq 0\,, \tag{205}$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \qquad \text{voor alle } \ 0 \leq x \leq L\,. \tag{206}$$

Als we een trillende snaar modelleren, dan geven de rechterleden $g(x)$ resp. $f(x)$ in (206) de initiële vorm en snelheid van de snaar, terwijl (206) betekent dat de uiteinden van de snaar zijn vastgeklemd. We nemen aan dat g en f continu en stuksgewijs continu-differentieerbaar zijn en dat $g(0) = g(L) = f(0) = f(L) = 0$.

Net als bij de warmtevergelijking gebruiken we de methode van scheiding van variabelen en onderzoeken we eerst of er oplossingen zijn van (204) van de vorm

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Net als bij de warmtevergelijking zien we dat dan de functies $X(x)$ en $T(t)$ moeten voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\ddot{T}(t) = c^2 \lambda T(t) \tag{207}$$

$$X''(x) = \lambda X(x) \tag{208}$$

voor een zekere constante λ.

Net als bij de warmtevergelijking zien we dat aan randvoorwaarde (205) alleen kan worden voldaan als

$$\lambda = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2} = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \qquad \text{voor een geheel getal } \ n \neq 0\,. \tag{209}$$

De bijbehorende oplossingen van (208) en (207) zijn dan

$$\begin{aligned} X(x) &= B \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \\ T(t) &= C_1 \cos\left(\frac{\pi c n}{L} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi c n}{L} t\right) \end{aligned}$$

Dit leidt tot het volgende systeem van basisfuncties

$$u_n(x,t) = \cos\left(\frac{\pi c n t}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \tag{210}$$

$$v_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi c n t}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \tag{211}$$

met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Deze basisfuncties voldoen allemaal aan de differentiaalvergelijking (204) en aan de randvoorwaarde (205). Dit geldt ook voor alle lineaire combinaties (superposities)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n u_n(x,t) + b_n v_n(x,t)).$$

Vanwege

$$\begin{aligned} u_n(x,0) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) , \qquad & \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = 0 , \\ v_n(x,0) = 0 , \qquad & \frac{\partial v_n}{\partial t}(x,0) = \frac{\pi c n}{L}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) , \end{aligned}$$

voldoet zo'n lineaire combinatie aan de beginvoorwaarde (206) precies dan als voor alle $x \in [0, L]$ geldt

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi c n}{L}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right). \end{aligned}$$

Dus net als bij de warmtevergelijking moeten we de randfuncties $g(x)$ en $f(x)$ voortzetten tot oneven $2L$-periodieke functies en hun Fouriercoëfficiënten berekenen:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\,dx \tag{212}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi c n}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\,dx \tag{213}$$

Conclusie: *De golfvergelijking* (204) *met randvoorwaarden* (206) *en beginvoorwaarden* (205) *heeft precies één oplossing gegeven door de reeks*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n u_n(x,t) + b_n v_n(x,t))$$

met $u_n(x,t)$*,* $v_n(x,t)$*,* a_n*,* b_n *als in* (210)–(213).

♡ **Opmerkingen**

1. Ook deze conclusie is enigszins voorbarig, wegens gebrek aan de convergentieanalyse; in dit geval zelfs tot op het niveau van term voor term tweemaal differentiëren van de reeks voor $u(x,t)$ naar x en t.

   In het onderhavige geval van de golfvergelijking is er echter een goedkoop alternatief: Kies een functie $F(x)$ zo dat $F'(x) = f(x)$. Definiëer

   $$g(x) := -g(-x) \quad \text{en} \quad F(x) := -F(-x)$$

   voor $-L \leq x < 0$. Dat zet de functie $g(x)$ voort tot een oneven $2L$-periodieke functie op $\mathbb{R}$ en zet de functie $F(x)$ voort tot een even $2L$-periodieke functie op $\mathbb{R}$. Maak vervolgens de functie

   $$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c}(F(x+ct) - F(x-ct)). \tag{214}$$

   Dan is

   $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{1}{2}(c^2 g''(x+ct) + c^2 g''(x-ct)) + \frac{1}{2c}(c^2 F''(x+ct) - c^2 F''(x-ct))$$

   en

   $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{1}{2}(g''(x+ct) + g''(x-ct)) + \frac{1}{2c}(F''(x+ct) - F''(x-ct)).$$

   Kortom

   $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t).$$

   Verder is

   $$\begin{aligned} u(0,t) &= \frac{1}{2}(g(ct) + g(-ct)) + \frac{1}{2c}(F(ct) - F(-ct)) = 0 \\ u(L,t) &= \frac{1}{2}(g(L+ct) + g(L-ct)) + \frac{1}{2c}(F(L+ct) - F(L-ct)) \\ &= \frac{1}{2}(g(L+ct) + g(-L-ct)) + \frac{1}{2c}(F(L+ct) - F(-L-ct)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   omdat g een $2L$-periodieke oneven functie en F een $2L$-periodieke even functie is.

Tot slot is voor $0 \leq x \leq L$:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}(g(x)+g(x)) + \frac{1}{2c}(F(x)-F(x)) = g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{1}{2}(cg'(x)-cg'(x)) + \frac{1}{2c}(cF'(x)+cF'(x)) = f(x). \end{aligned}$$

Conclusie: *De functie $u(x,t)$ gegeven in* (214) *voldoet aan de golfvergelijking* (204) *en aan de randvoorwaarden* (206) *en de beginvoorwarden* (205)*.*

Het verband tussen twee oplosmethoden wordt gegeven door de volgende eenvoudige berekening

$$\begin{aligned} g(x+ct) \quad &+ \quad g(x-ct) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sin\left(\frac{\pi n(x+ct)}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi n(x-ct)}{L}\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[2\cos\left(\frac{\pi cnt}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \right] \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t). \end{aligned}$$

Op dezelfde manier vindt men

$$\begin{aligned} F(x+ct) \quad &- \quad F(x-ct) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} cb_n \left[\cos\left(\frac{\pi n(x+ct)}{L}\right) + \cos\left(\frac{\pi n(x-ct)}{L}\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} cb_n \left[2\sin\left(\frac{\pi cnt}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) \right] \\ &= 2c\sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(x,t), \end{aligned}$$

want

$$cb_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\, dx$$

2. Net als voor de warmtevergelijking kunnen we voor elke $t \in \mathbb{R}$ een oplossing van de golfvergelijking (204) zoeken in de ruimte V van oneven continu en stuksgewijs continu-differentieerbare functies van $x \in [-L, L]$, die gelijk zijn aan nul in $x = 0$ en L. We schrijven dus deze oplossing als de Fourierreeks

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

met de coëfficiënten

$$c_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx\,, \quad \dot{c}_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx\,.$$

Uit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{L}\right), \quad c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \left[-\left(\frac{\pi c n}{L}\right)^2\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

volgt dat

$$\ddot{c}_n(t) = -\left(\frac{\pi c n}{L}\right)^2 c_n(t), \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De algemene oplossing van deze gewone differentiaalvergelijking is

$$c_n(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi c n}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi c n}{L} t\right).$$

De constanten a_n en b_n moeten voldoen aan

$$c_n(0) = a_n, \qquad \dot{c}_n(0) = b_n \frac{\pi c n}{L}\,.$$

We hebben dus

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx\,, \\ b_n &= \frac{2}{\pi c n}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx\,. \end{aligned}$$

Dit leidt tot dezelfde oplossing als (210)–(213). ♡

7.3 De warmtevergelijking op $\mathbb{R}$

We bestuderen nu de warmtevergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{215}$$

voor $x \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$ met de volgende beginvoorwaarde

$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}\,. \tag{216}$$

Hierin is $g(x)$ een gegeven functie die de initiële temperatuurverdeling aangeeft. We nemen aan dat g tweemaal continu differentieerbaar is en dat g, g' en g'' allemaal absoluut integreerbare functies zijn, d.w.z.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|\, dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g''(x)|\, dx$$

bestaan.

In dit geval zoeken we een oplossing $u = u(x,t)$ van (215) die aan (216) voldoet en waarvoor de volgende integralen bestaan voor alle $t \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right| dx\,. \tag{217}$$

Merk op dat deze condities de rol van de randvoorwaarden spelen en garanderen dat

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 \;\text{ en }\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

voor alle $t \geq 0$.

Voorlopig veronderstellen we dat zo'n functie $u(x,t)$ bestaat. Dan leert Stelling 4.9 in Hoofdstuk 4 en de opmerking daarna dat

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(s,t) e^{isx}\, ds \tag{218}$$

met

$$\widehat{u}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x,t)\, dx$$

voor alle $t \geq 0$. De formule (218) zegt dat de oplossing een 'continue lineaire combinatie' (of 'superpositie') is van de basisfuncties $x \mapsto e^{isx}$ met coëfficiënten $\widehat{u}(s,t)$ die van de tijd t afhangen. Hierin is $s \in \mathbb{R}$ een parameter die de basisfuncties aangeeft. Veronderstel dat

$$\frac{\partial \widehat{u}(s,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \, dx$$

voor $t > 0$. Omdat $u(x,t)$ aan (215) voldoet, geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \, dx$$

en door tweemaal partiëel integreren krijgen we:

$$\frac{\partial \widehat{u}(s,t)}{\partial t} = (-is)^2 a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x,t) \, dx$$

ofwel

$$\frac{\partial \widehat{u}(s,t)}{\partial t} = -a^2 s^2 \, \widehat{u}(s,t) \,. \tag{219}$$

Voor iedere $s \in \mathbb{R}$ is dit een gewone differentiaalvergelijking voor $\widehat{u}(s,t)$ (als functie van t) met de oplossing

$$\widehat{u}(s,t) = e^{-a^2 s^2 t} \, \widehat{u}(s,0)$$

waarin

$$\widehat{u}(s,0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} \, dx \ = \ \widehat{g}(s) \,. \tag{220}$$

We weten dat $\widehat{g}_0(s) = \sqrt{2\pi} \, e^{-\frac{1}{2}s^2}$ voor $g_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en dat

$$\widehat{g}_1(s) = \frac{1}{|\alpha|} \widehat{g}_0 \left(\frac{s}{\alpha} \right) \qquad \text{als} \quad g_1(x) = g_0(\alpha x) \,.$$

Deze eigenschappen impliceren[4] dat voor alle $t > 0$ geldt:

$$e^{-a^2 s^2 t} = \widehat{G}(s,t)$$

waarin

$$G(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \tag{221}$$

[4]Neem: $\alpha^{-1} = a\sqrt{2t}$.

de zgn. *warmte kern*. We hebben dus $\widehat{u}(s,t) = \widehat{G}(s,t)\ \widehat{g}(s)$. Hieruit volgt met Stelling 5.3 over het convolutieprodukt dat

$$u(x,t) = (G(\cdot,t) * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,t) g(x-\xi)\, d\xi$$

ofwel

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} g(x-\xi)\, d\xi\,.$$

Wegens de commutativiteit van het convolutieprodukt geldt voor $t > 0$ de volgende ***formule van Poisson***:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} g(\xi)\, d\xi\,. \tag{222}$$

Nu kunnen we de functie van twee variabelen $u(x,t)$ *definiëren* door (222) voor iedere tweemaal continu differentieerbare functie g met absoluut integreerbare g, g' en g''. Men kan dan bewijzen dat de integraal in (222) convergeert voor alle $t > 0$ en dat

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

bestaan en met differentiëren onder het integraal-teken berekend kunnen worden. Hieruit volgt dat (222) aan de warmtevergelijking (215) voldoet voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $t > 0$.

We moeten nog controleren dat deze oplossing aan de beginvoorwarde (216) voldoet. Omdat $G(x,t)$ alleen voor $t > 0$ gedefinieerd is, kunnen we in (222) niet direkt $t = 0$ zetten. Toch geldt

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x,t) = g(x) \qquad \text{voor alle} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Inderdaad, laat opgave 4(c) in paragraaf 6.8 zien dat de functie

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}$$

naar de deltafunctie $\delta(x)$ convergeert als $\varepsilon \downarrow 0$. Als we $\varepsilon = 4a^2 t$ nemen, dan zien we dat $G(x,t)$ naar $\delta(x)$ convergeert als $t \downarrow 0$ en dus

$$\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = \lim_{t\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,t) g(x-\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) g(x-\xi)\, d\xi = g(x).$$

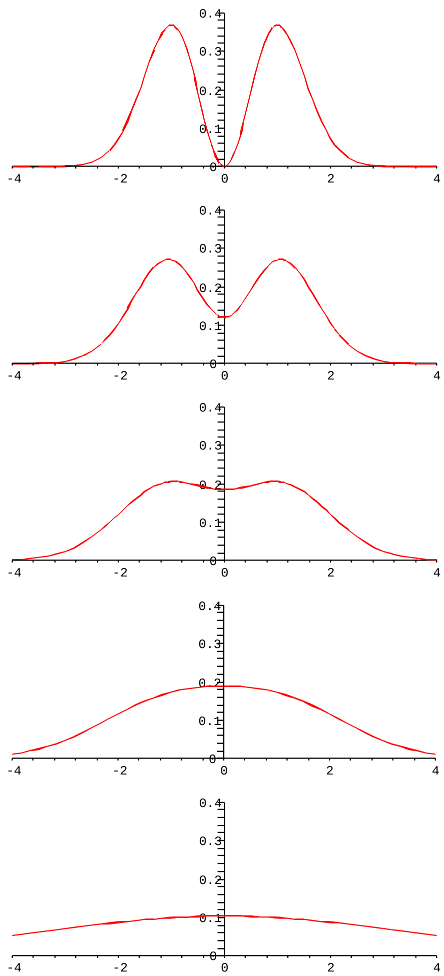
♢ **Voorbeeld.** Beschouw de warmtevergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

met $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ en de beginvoorwarde $u(x,0) = x^2 e^{-x^2}$, d.w.z. $a = 1$ en $g(x) = x^2 e^{-x^2}$.

De formule van Poisson (222) geeft dan de expliciete oplossing

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{x^2 + 2t + 8t^2}{(1+4t)^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$



Ga zelf na dat deze functie aan de warmtevergelijking en de beginvoorwaarde voldoet. De figuur geeft de oplossing voor $t = 0, 0.1, 0.3, 0.7$ en 5.0. Merk op dat

$$u(0,t) = \frac{2t + 8t^2}{(1+4t)^{5/2}}$$

niet-monotoon is met maximum in $t = \frac{1}{2}$.

$\diamondsuit$

$\heartsuit$ **Opmerking.** Omdat de warmte kern $G(x,t)$ zeer snel daalt als $x \to \pm\infty$, is de integraal in (222) convergent en tweemaal differentieerbaar naar (x,t) voor een veel bredere verzameling functies $g(x)$ dan alle tweemaal continu differentieerbare functies met integreerbare $|g|$, $|g'|$ en $|g''|$. Bijvoorbeeld, kunnen we iedere begrensde continue functie g nemen. De resulterende functie $u(x,t)$ is dan een *gegeneraliseerde oplossing* van (215) en (216). $\heartsuit$

7.4 De golfvergelijking op $\mathbb{R}$

Ten slotte bestuderen we de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{223}$$

voor $x \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$ met de volgende beginvoorwaarden

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \qquad \text{voor alle} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{224}$$

Hierin zijn $g(x)$ en $f(x)$ tweemaal continu differentieerbare gegeven functies, die absoluut integreerbaar zijn samen met hun eerste en tweede afgeleiden.

Net zoals bij de warmtevergelijking op $\mathbb{R}$, veronderstellen we eerst dat een oplossing $u(x,t)$ van (223) en (224) bestaat waarvoor de oneigenlijke integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right| dx \tag{225}$$

convergeren. Dan geldt

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(s,t) e^{isx}\, ds \tag{226}$$

met

$$\widehat{u}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x,t)\, dx\,.$$

Voor iedere $s \in \mathbb{R}$ leidt dit tot de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}(s,t)}{\partial t^2} = -c^2 s^2\ \widehat{u}(s,t)\,. \tag{227}$$

Dit is een gewone tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking voor $\widehat{u}(s,t)$ (als functie van t) met de algemene oplossing

$$\widehat{u}(s,t) = Ae^{icst} + Be^{-icst}$$

waarbij $A, B \in \mathbb{C}$. Deze constanten kunnen we met de beginvoorwaarden bepalen, want

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widehat{u}(s,0) & = & A+B, \\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(s,0) & = & ics(A-B) \end{array} \right. \qquad \text{ofwel} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \widehat{g}(s) & = & A+B, \\ \widehat{f}(s) & = & ics(A-B). \end{array} \right.$$

Hieruit volgt dat

$$A = \frac{1}{2}\left(\widehat{g}(s) + \frac{1}{ics}\widehat{f}(s)\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\widehat{g}(s) - \frac{1}{ics}\widehat{f}(s)\right)$$

en dus

$$\widehat{u}(s,t) = \frac{1}{2}\left(\widehat{g}(s) + \frac{1}{ics}\widehat{f}(s)\right) e^{icst} + \frac{1}{2}\left(\widehat{g}(s) - \frac{1}{ics}\widehat{f}(s)\right) e^{-icst}.$$

Kies nu een functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zo dat $F'(x) = f(x)$. Stelling 4.8 uit Hoofdstuk 4 impliceert dat $\widehat{f}(s) = is\widehat{F}(s)$ zodat

$$\frac{1}{ics}\ \widehat{f}(s) = \frac{1}{c}\ \widehat{F}(s).$$

We hebben dus

$$\widehat{u}(s,t) = \frac{1}{2}[\widehat{g}(s)e^{i(ct)s} + \widehat{g}(s)e^{-i(ct)s}] + \frac{1}{2c}[\widehat{F}(s)e^{i(ct)s} - \widehat{F}(s)e^{-i(ct)s}].$$

Met Stelling 4.11 zien we dat

$$\widehat{g}(s)e^{i\omega s} = \widehat{G}(s) \quad \text{en} \quad \widehat{F}(s)e^{i\omega s} = \widehat{H}(s)\,,$$

waarin $G(x) = g(x + \omega)$ en $H(x) = F(x + \omega)$, resp. Dus

$$\widehat{u}(s,t) = \widehat{U}(s,t)$$

met

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{1}{2c}[F(x+ct) - F(x-ct)]\,. \tag{228}$$

De Fourierinversie formule impliceert dan dat $u(x,t) = U(x,t)$ en

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f(\xi)d\xi \tag{229}$$

(de ***formule van d'Alembert***). Het is makkelijk te controleren dat deze functie aan de golfvergelijking (223) voldoet en dat

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}[g(x) + g(x)] = g(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{1}{2c}\, c\; [F'(x) + F'(x)] = F'(x) = f(x), \end{aligned}$$

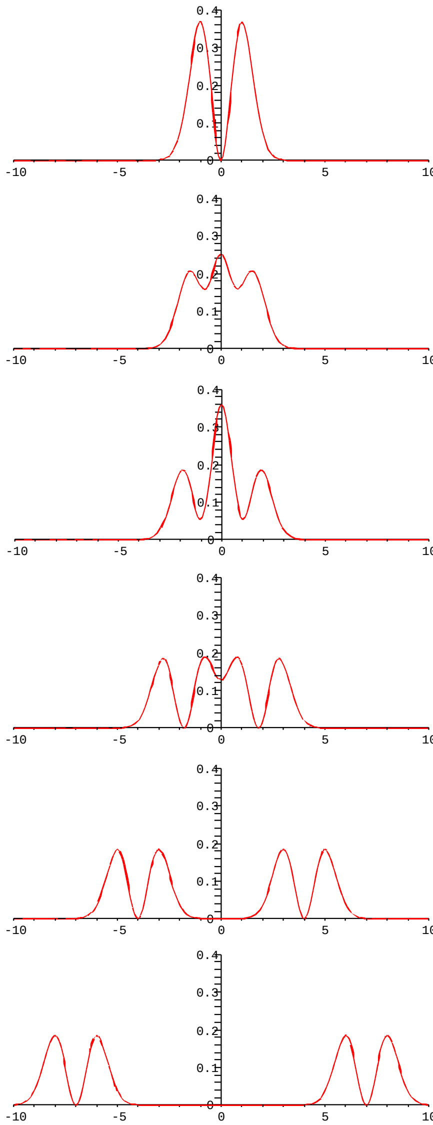
zodat de beginvoorwaarden (224) ook voldaan. We hebben dus de oplossing van het beginwaardeprobleem voor de golfvergelijking op $\mathbb{R}$ gevonden.

Laten we de formule van d'Alembert (229) nog eens nader bekijken. Wegens de lineariteit van de golfvergelijking, is iedere term daarin een oplossing van (223). Bijv. voldoet $u_-(x,t) = g(x-ct)$ aan (223) voor iedere tweemaal continu differentieerbare functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Deze oplossing beschrijft een *vlakke golf* met constante snelheid c. Voor iedere t is de grafiek van $u(x,t)$ een verschuiving van de grafiek van $g(x)$ over ct coördinaat-eenheden rechts. De oplossing $u_+(x,t) = g(x+ct)$ beschrijft een andere vlakke golf die met constante snelheid van rechts naar links loopt.

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Beschouw de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

met $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ en de beginvoorwaarden $u(x,0) = x^2 e^{-x^2}$ en $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.



De formule van d'Alembert (229) geeft dan meteen de expliciete oplossing

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x-t)^2 e^{-(x-t)^2} + (x+t)^2 e^{-(x+t)^2}\right],$$

d.w.z. een superpositie van twee vlakke golven die in de tegengestelde richtingen uiteenlopen. De figuur geeft de oplossing voor $t = 0, 0.3, 0.6, 0.8, 1.8$ en 4.0. $\diamondsuit$

♡ **Opmerking.** Er is een andere manier om tot de formule van d'Alembert (229) te komen. Met deze methode zullen we geen Fourierintegralen gebruiken.

Stel dat een tweemaal continu differentieerbare functie $u = u(x,t)$ voldoet aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{230}$$

Maak een *substitutie van de variabelen*, nl.

$$\begin{cases} \xi &= x + ct, \\ \eta &= x - ct, \end{cases} \qquad \text{ofwel} \qquad \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ t &= \frac{1}{2c}(\xi - \eta). \end{cases}$$

Definiëer de tweemaal continu differentieerbare functie

$$U(\xi, \eta) := u(x,t) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right).$$

Dan

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c}\frac{\partial u}{\partial t}$$

en vervolgens

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial \eta} \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{1}{2c} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \quad \equiv \quad 0. \end{aligned}$$

We zien dat de functie $U = U(\xi, \eta)$ aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

voldoet. Hieruit volgt dat U de som is van twee functies, beide van één variabele:

$$U(\xi, \eta) = V(\xi) + W(\eta).$$

Dit betekent dat de algemene klassieke oplossing van (230) (230) wordt gegeven door de formule

$$u(x,t) = V(x + ct) + W(x - ct)$$

waarbij V en W willekeurige tweemaal continu differentieerbare functies zijn.

Als we de oplossing van (230) zoeken die bovendien aan de beginvoorwaarden

$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x)$$

voldoet, dan kunnen we de functies V en W bepalen. Inderdaad:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x+ct} - c\frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=x-ct}$$

en dus geldt voor $t=0$ dat

$$\begin{cases} u(x,0) &= V(x)+W(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= c(V'(x)-W'(x)). \end{cases}$$

Hieruit volgt een stelsel vergelijkingen voor $V(x)$ en $W(x)$, nl.

$$\begin{cases} V(x)+W(x) &= g(x), \\ c(V'(x)-W'(x)) &= f(x). \end{cases}$$

De tweede vergelijking is een differentiaalvergelijking die impliceert

$$V(x)-W(x) = \frac{1}{c}F(x)$$

voor een functie F met $F'(x)=f(x)$. Dus

$$\begin{cases} V(x)+W(x) &= g(x), \\ V(x)-W(x) &= \frac{1}{c}F(x) \end{cases}$$

waaruit blijkt

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(g(x)+\frac{1}{c}F(x)\right), \quad W(x) = \frac{1}{2}\left(g(x)-\frac{1}{c}F(x)\right).$$

We krijgen dus de formule

$$U(\xi,\eta) = \frac{1}{2}[g(\xi)+g(\eta)] + \frac{1}{2c}[F(\xi)-F(\eta)]$$

ofwel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)] + \frac{1}{2c}[F(x+ct)-F(x-ct)],$$

die equivalent is met (228) en (229). ♡

7.5 Opgaven

1. We onderzoeken functies $u(x,t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = u_t + u \quad \text{voor} \quad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \qquad (\clubsuit)$$

en die te schrijven zijn als $u(x,t) = X(x)T(t)$, waarbij $X(x)$ resp. $T(t)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van een variabele x resp. t.

   (a) Vertaal de gegeven partiële differentiaalvergelijking in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.

   (b) Geef alle functies $u(x,t)$ van de vorm $u(x,t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de gegeven partiële differentiaalvergelijking ($\clubsuit$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor} \quad t > 0\,.$$

2. We onderzoeken functies $u(x,t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = u_{tt} + u \quad \text{voor} \quad 0 \le x \le \pi\,,\ t \ge 0. \qquad (\triangle)$$

   (a) Eerst onderzoeken we oplosssingen van ($\triangle$) die te schrijven zijn als $u(x,t) = X(x)T(t)$, waarbij $X(x)$ resp. $T(t)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. t.
   Vertaal de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.

   (b) Geef alle functies $u(x,t)$ van de vorm $u(x,t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor} \quad t \ge 0\,.$$

   (c) Geef een oplossing $u(x,t)$ van de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) die voldoet aan de rand- en beginvoorwaarden

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor} \quad t \ge 0\,,$$
$$u(x,0) = \sin x\,, \quad u_t(x,0) = \sin 2x \qquad \text{voor} \quad 0 \le x \le \pi.$$

3. We onderzoeken functies $u(x,t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = -u_{tt} + 2u_t - u \quad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi\,,\ t \geq 0. \qquad (\triangle)$$

   (a) Eerst onderzoeken we oplosssingen van $(\triangle)$ die te schrijven zijn als
   $u(x,t) = X(x)T(t)$, waarbij $X(x)$ resp. $T(t)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. t.
   Vertaal de partiële differentiaalvergelijking $(\triangle)$ in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.

   (b) Geef alle functies $u(x,t)$ van de vorm $u(x,t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking $(\triangle)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor} \quad t \geq 0\,.$$

   (c) Geef een oplossing $u(x,t)$ van de partiële differentiaalvergelijking $(\triangle)$ die voldoet aan de rand- en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{voor} \quad t \geq 0\,,\\ &u(x,0) = \sin x\,, \quad u_t(x,0) = \sin 2x \qquad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

   Waarschuwing: De functie $u(x,t)$ in dit onderdeel heeft niet de bijzondere vorm $X(x)T(t)$.

4. We onderzoeken functies $u(x,y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + 5u = 0 \quad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi\,, 0 \leq y \leq \pi. \qquad (\triangle)$$

   (a) Eerst onderzoeken we oplosssingen van $(\triangle)$ die te schrijven zijn als
   $u(x,y) = X(x)Y(y)$, waarbij $X(x)$ resp. $Y(y)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. y.
   Vertaal de partiële differentiaalvergelijking $(\triangle)$ in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $Y(y)$.

(b) Geef alle functies $u(x,y)$ van de vorm $u(x,y) = X(x)Y(y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$\begin{array}{rcllr} u(0,y) &=& u(\pi,y) = 0 & \text{voor} & 0 \le y \le \pi\,, \\ u(x,0) &=& 0 & \text{voor} & 0 \le x \le \pi\,. \end{array}$$

(c) Geef alle functies $u(x,y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$\begin{array}{rcllr} u(0,y) &=& u(\pi,y) = 0 & \text{voor} & 0 \le y \le \pi\,, \\ u(x,0) &=& 0 & \text{voor} & 0 \le x \le \pi \\ u(x,\pi) &=& \sin(3x) & \text{voor} & 0 \le x \le \pi\,. \end{array}$$

Opmerking: de functies $u(x,y)$ in dit onderdeel *hoeven niet* de vorm $X(x)Y(y)$ te hebben.

5. We onderzoeken functies $u(x,y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + 3u_{yy} + u = 0 \quad \text{voor} \quad 0 \le x \le \pi\,, 0 \le y \le \pi. \qquad (\triangle)$$

(a) Eerst onderzoeken we oplosssingen van ($\triangle$) die te schrijven zijn als
$u(x,y) = X(x)Y(y)$, waarbij $X(x)$ resp. $Y(y)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. y.
Vertaal de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $Y(y)$.

(b) Geef alle functies $u(x,y)$ van de vorm $u(x,y) = X(x)Y(y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$\begin{array}{rcllr} u(0,y) &=& u(\pi,y) = 0 & \text{voor} & 0 \le y \le \pi\,, \\ u(x,0) &=& 0 & \text{voor} & 0 \le x \le \pi\,. \end{array}$$

(c) Geef alle functies $u(x,y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking ($\triangle$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$\begin{array}{rcllr} u(0,y) &=& u(\pi,y) = 0 & \text{voor} & 0 \le y \le \pi\,, \\ u(x,0) &=& 0 & \text{voor} & 0 \le x \le \pi \\ u(x,\pi) &=& \sin x \,+\, \sin(2x) & \text{voor} & 0 \le x \le \pi\,. \end{array}$$

Opmerking: de functies $u(x, y)$ in dit onderdeel *hoeven niet* de vorm $X(x)Y(y)$ te hebben.

6. Bewijs dat de warmte kern $G(x, t)$ gegeven door (221) een oplossing is van de warmtevergelijking (215).

7. Bereken de oplossing van de golfvergelijking (223) met de beginvoorwaarden

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 2xe^{-x^2} \qquad \text{voor} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

8. We onderzoeken functies $u(x, y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{voor} \quad x \in \mathbb{R}\,, y > 0, \qquad (\clubsuit)$$

én de randvoorwaarde

$$u(x, 0) = g(x) \qquad \text{voor alle} \;\; x \in \mathbb{R}\,, \qquad (\spadesuit)$$

waarbij g een tweemaal continu differentieerbare functie is met integreerbare $|g|, |g'|$ en $|g''|$.

(a) Laat zien dat

$$-s^2\widehat{u}(s, y) + \frac{\partial^2\widehat{u}(s, y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (\triangle)$$

waarin $\widehat{u}(s, 0) = \widehat{g}(s)$.

(b) Schrijf de algemene oplossing van $(\triangle)$ en bewijs dat de unieke begrensde oplossing met $\widehat{u}(s, 0) = \widehat{g}(s)$ is

$$\widehat{u}(s, y) = e^{-|s|y}\widehat{g}(s).$$

(c) Bewijs dat $e^{-|s|y} = \widehat{P}(s, y)$ met

$$P(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \qquad \text{voor} \;\; x \in \mathbb{R}\,, y > 0$$

(*Hint*: Denk aan de Fourierinversie formule voor $s \mapsto e^{-y|s|}$.) De functie $P(x, y)$ heet de *Poisson kern*.

(d) Concludeer vervolgens dat $u(x,y) = (P(\cdot,y) * g)(x)$ en laat zien dat

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(\xi^2+y^2)}\, g(x-\xi)\, d\xi\,.$$

(e) Bewijs dat

$$\lim_{y\downarrow 0} u(x,y) = g(x) \qquad\qquad \text{voor} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Hint: Gebruik opgave 4(e) van paragraaf 6.8.

(f) Vind een begrensde oplossing van (♣) en (♠) met

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Controleer je antwoord.

Hint: Het is bekend dat voor

$$F = \frac{x\ln\left(\frac{\xi^2+y^2}{1+(x-\xi)^2}\right) - (x^2+y^2-1)\mathrm{arctg}(x-\xi) + \frac{x^2-y^2+1}{y}\mathrm{arctg}\left(\frac{\xi}{y}\right)}{(x^2+(1-y)^2)(x^2+(1+y)^2)}$$

geldt

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{1}{(1+(x-\xi)^2)(\xi^2+y^2)}$$

als $x, \xi \in \mathbb{R}, y > 0$.

8 Meerdimensionale Fouriertheorie

In dit hoofdstuk generaliseren we Fourier reeksen en integralen naar hoger dimensionale ruimten. Dan gebruiken we deze generalisaties om enkele meerdimensionale partiële differentiaalvergelijkingen te analyseren.

De warmte- resp. golfvergelijking voor 2 ruimte- en 1 tijdsdimensie (bijvoorbeeld voor de temperatuurontwikkeling in een plaat resp. voor een kleine trillingen van een membraan) zijn

$$\text{de warmtevergelijking:} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{de golfvergelijking:} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Voor 3 ruimte- en 1 tijdsdimensie zijn het

$$\text{de warmtevergelijking:} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{de golfvergelijking:} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Met de gebruikelijke notatie voor de *Laplace operator*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{resp.} \qquad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

kunnen we de warmtevergelijkingen in de 2- resp. 3-dimensionale ruimte schrijven als

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \Delta w \tag{231}$$

waarin de temperatuur w een functie is van straalvector

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

en tijd t, d.w.z. $w = w(\mathbf{r}, t)$. Op soortgelijke manier kunnen we de golfvergelijkingen in de 2- of 3-dimensionale ruimte schrijven als

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w \tag{232}$$

met $w = w(\mathbf{r}, t)$.

♡ **Opmerking.** Wanneer we een oplossing van (231) resp. (232) zoeken die van één ruimtecoördinaat (bijv. x) afhangt,

$$w(\mathbf{r}, t) = u(x, t),$$

dan voldoet u aan de oorspronkelijke 1-dimensionale warmte- en golfvergelijkingen (187) resp. (188). ♡

De vergelijkingen (231) en (232) komen vaak voor in de Natuurkunde. Bijvoorbeeld beschrijft (231) ook de *diffusie*, d.w.z. het passieve transport van een stof met de richting van een concentratiegradiënt mee. In dit geval is $w(\mathbf{r}, t)$ de concentratie van de stof in het punt met de straalvector $\mathbf{r}$ op de tijdstip t. De vergelijking (232) is belangrijk in de *klassieke elektrodynamica.* Inderdaad, voldoen de elektrische en magnetische velden

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{en} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

in vacuüm aan de *wetten van Maxwell*:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad & \text{div } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad & \text{div } \mathbf{H} &= 0, \end{aligned}$$

waarin c de *lichtsnelheid* is. Omdat[5]

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E},$$

implicieren de wetten van Maxwell dat

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{H}.$$

Hieruit volgt dat iedere component van $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ aan de golfvergelijking (232) voldoet.

[5]Zie de definities van de differentiaaloperatoren rot, div en grad in Hoodfstuk 6; voor een vectorveld $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r}))^{\mathrm{T}}$ is de *Laplace operator* $\Delta \mathbf{E} := (\Delta(E_x), \Delta(E_y), \Delta(E_z))^{\mathrm{T}}$.

8.1 Meerdimensionale Fourierreeksen

Stellingen 2.17 en 2.22 in Hoodstuk 2 impliceren dat voor iedere tweemaal continu differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met periode T geldt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{i\omega n x} \tag{233}$$

waarin $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ en

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\omega s} f(s)\, ds\,. \tag{234}$$

Ook weten we dat (233) omschreven kan worden naar de cos/sin-reeks

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \tag{235}$$

met

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\, ds \tag{236}$$

en

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(s) \cos(n\omega s)\, ds\,, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(s) \sin(n\omega s)\, ds \tag{237}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Eigenlijk geldt (235) voor iedere continue T-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die slechts stuksgewijs continu differentieerbaar is. Als f *oneven* is dan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

waarin

$$b_n = \frac{2}{(T/2)} \int_0^{T/2} f(s) \sin(n\omega s)\, ds.$$

Neem nu een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ van twee variabelen x_1 en x_2 waarvoor

$$f(x_1 + T_1, x_2) = f(x_1, x_2 + T_2) = f(x_1, x_2) \qquad \text{voor alle } (x_1, x_2)$$

en definiëer

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\,.$$

Als deze functie f tweemaal continu differentieerbaar is, d.w.z. alle partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_j \partial x_k}, \quad j,k=1,2$$

continue functies van (x_1,x_2) zijn, dan kunnen we voor iedere x_2 de formule (233) toepassen. Dit geeft

$$f(x_1,x_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{n_1}(x_2) e^{i\omega_1 n_1 x_1}$$

waarbij

$$\widehat{f}_{n_1}(x_2) = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} e^{-in_1\omega_1 s_1} f(s_1,x_2)\, ds_1.$$

Voor deze functie van één variabel x_2 geldt dan ook

$$\widehat{f}_{n_1}(x_2) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{n_1,n_2} e^{i\omega_2 n_2 x_2}$$

met

$$\widehat{f}_{n_1,n_2} = \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} e^{-in_2\omega_2 s_2} \widehat{f}_{n_1}(s_2)\, ds_2\,.$$

Dus

$$f(x_1,x_2) = \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{n_1,n_2} e^{i(\omega_1 n_1 x_1 + \omega_2 n_2 x_2)} \tag{238}$$

waarin

$$\widehat{f}_{n_1,n_2} := \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} e^{-i(n_1\omega_1 x_1 + n_2\omega_2 x_2)} f(s_1,s_2)\, ds_1 ds_2\,. \tag{239}$$

De formule (238) geeft de functie f aan als de *tweedimensionale Fourierreeks* met de *Fouriercoefficiënten* (239). In het desbetreffende geval is deze reeks absoluut convergent.

Als f continu is in (x_1,x_2) en stuksgewijs continu differentieerbaar is naar x_1 voor iedere $x_2 = \text{const}$ en naar x_2 voor iedere $x_1 = \text{const}$, dan kan (233) omschreven worden naar

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) \ = \ A_{0,0} + \textstyle\sum_{n_1,n_2\geq 1} \quad & [A_{n_1,n_2}\cos(\omega_1 n_1 x_1)\cos(\omega_2 n_2 x_2) \ + \\ & B_{n_1,n_2}\cos(\omega_1 n_1 x_1)\sin(\omega_2 n_2 x_2) \ + \\ & C_{n_1,n_2}\sin(\omega_1 n_1 x_1)\cos(\omega_2 n_2 x_2) \ + \\ & D_{n_1,n_2}\sin(\omega_1 n_1 x_1)\sin(\omega_2 n_2 x_2)], \end{aligned}$$

waarin de coëfficiënten $A_{n_1,n_2}, B_{n_1,n_2}, C_{n_1,n_2}$ en D_{n_1,n_2} met de hulp van (236) en (237) gevonden kan worden.

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** Beschouw een tweemaal continu differentieerbare functie $f : \Pi \to \mathbb{R}$ gedefineerd op de rechthoek

$$\Pi = \{(x,y) : 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H\} \subset \mathbb{R}^2$$

en zó dat

$$\begin{cases} f(0,y) = f(L,y) = 0 & \text{voor } \ y \in [0,H], \\ f(x,0) = f(x,H) = 0 & \text{voor } \ x \in [0,L]. \end{cases}$$

Zet de functie voort tot een continu differentieerbare functie op $\mathbb{R}^2$ die $2L$- resp. $2H$-periodiek in x resp. in y waarvoor

$$f(x,y) := \begin{cases} -f(-x,y) & \text{als } \ x \in [-L,0],\ y \in [0,H], \\ f(-x,-y) & \text{als } \ x \in [-L,0],\ y \in [-H,0], \\ -f(x,-y) & \text{als } \ x \in [0,L],\ y \in [-H,0]. \end{cases}$$

Dan is $f(x,y)$ een oneven $2L$-periodieke functie voor iedere $y \in \mathbb{R}$ en geldt

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

met

$$b_n(y) = \frac{2}{L} \int_0^L f(s,y) \sin\left(\frac{\pi n s}{L}\right)\, ds$$

die ook oneven en $2H$-periodiek in y is. Dus kunnen we schrijven

$$b_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} D_{n,m} \sin\left(\frac{\pi m y}{H}\right)$$

waarin

$$D_{n,m} = \frac{2}{H} \int_0^H b_n(t) \sin\left(\frac{\pi m t}{H}\right)\, dt\,.$$

De conclusie:

$$f(x,y) = \sum_{n,m \ge 1} D_{n,m} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{H}\right)$$

met

$$D_{n,m} = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H f(s,t) \sin\left(\frac{\pi n s}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m t}{H}\right) \, dsdt \,. \tag{240}$$

$\diamondsuit$

De generalisatie naar hogere dimensies is duidelijk. Laat

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

en $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ een tweemaal continu differentieerbare functie zijn met

$$\begin{aligned} f(x_1 + T_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_k), \\ f(x_1, x_2 + T_2, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_k), \\ &\vdots \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n + T_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}^k$. Definëer

$$\omega_j = \frac{2\pi}{T_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Dan wordt de functie f gegeven door de *k-dimensionale Fourierreeks*

$$f(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{n_1,\ldots,n_k} e^{i(\omega_1 n_1 x_1 + \cdots + \omega_k n_k x_k)}$$

met de *Fouriercoëfficiënten*

$$\widehat{f}_{n_1,\ldots,n_k} := \frac{1}{T_1 \cdots T_k} \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_k} e^{-i(\omega_1 n_1 s_1 + \cdots + \omega_k n_k s_k)} f(s_1, \ldots, s_k) \, ds_1 \cdots ds_k \,.$$

De laatste twee formules zien er wat mooier uit als we $ds := ds_1 \cdots ds_k$ schrijven, de volgende vectoren

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^k, \quad \xi(n) = \begin{pmatrix} \omega_1 n_1 \\ \vdots \\ \omega_k n_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

introduceren en het *inprodukt* gebruiken, d.w.z.

$$(\xi \cdot x) := \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_k x_k \,.$$

Dan

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} \widehat{f}_n e^{i(\xi(n)\cdot x)}$$

met

$$\widehat{f}_n := \frac{1}{T_1 T_2 \cdots T_k} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \cdots \int_0^{T_k} e^{-i(\xi(n)\cdot s)}\, ds \,.$$

8.2 De warmtevergelijking op een rechthoek

We bestuderen de warmtevergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{241}$$

voor $0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq H$ en $t \geq 0$ met de volgende rand- en beginvoorwaarden

$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0 \qquad \text{voor alle } \ y \in [0,H],\, t \geq 0\,, \tag{242}$$
$$u(x,0,t) = u(x,H,t) = 0 \qquad \text{voor alle } \ x \in [0,L],\, t \geq 0\,, \tag{243}$$
$$u(x,y,0) = f(x,y) \qquad \text{voor alle } \ (x,y) \in \Pi, \tag{244}$$

waarbij

$$\Pi = \{(x,y) : 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq H\} \subset \mathbb{R}^2$$

en is $f : \Pi \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie zó dat

$$\begin{cases} f(0,y) = f(L,y) = 0 & \text{voor alle } \ y \in [0,H], \\ f(x,0) = f(x,H) = 0 & \text{voor alle } \ x \in [0,L]. \end{cases}$$

Dus is $f(x,y)$ een gegeven functie die de initiële temperatuurverdeling op de rechthoek Π aangeeft.

Als eerste aanzet om de vergelijking (241) op te lossen zoekt men naar oplossingen waarin de ruimte- en de tijdvariabelen zijn gescheiden:

$$u(x,y,t) = R(x,y)T(t)\,.$$

Dit leidt tot

$$R(x,y)\dot{T}(t) = a^2 \Delta R(x,y) T(t)$$

waarin $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ de Laplace operator is. Net zoals in de 1-dimensionale ruimte krijgen we

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= a^2 \lambda T(t), \\ \Delta R(x,y) &= \lambda R(x,y), \end{aligned} \tag{245}$$

waarin $\lambda = \text{const}$. Vergelijking (245) noemt men de *Laplace vergelijking*. We zien dus dat

$$e^{\lambda a^2 t} R(x,y)$$

een oplossing van (241), (242) en (243) is als λ en R voldoen aan

$$\begin{cases} \Delta R(x,y) = \lambda R(x,y) & (x,y) \in \Pi, \\ R(0,y) = R(L,y) = 0 & \text{voor alle } \ y \in [0,H], \\ R(x,0) = R(x,H) = 0 & \text{voor alle } \ x \in [0,L]. \end{cases} \tag{246}$$

Voor de 1-dimensionale ruimte is de Laplace operator gewoon $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ en is (245) precies wat we al eerder vonden in (194) en (208). Daar hebben we ook gezien dat niet-triviale oplossingen van de Laplace vergelijking, die gelijk aan nul in $x = 0$ en $x = L$ zijn, alleen voorkwamen voor heel speciale waarden van λ, nl.

$$\lambda = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \qquad \text{voor een geheel getal } \ n \geq 1\,.$$

Om niet-triviale oplossingen van het randwaardeprobleem (246) te vinden, kunnen we de methode van scheiding van variabelen noch één keer gebruiken. We zoeken dus een oplossing van (246) in de vorm

$$R(x,y) = X(x)Y(y)$$

d.w.z. waarbij R het produkt is van een functie van x alleen en een functie van y alleen. Uit de randvoorwaarden in (246) volgen dan de voorwarden

$$X(0) = X(L) = 0 \quad \text{en} \quad Y(0) = Y(H) = 0.$$

De Laplace vergelijking impliceert

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y)$$

ofwel

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

voor alle $(x, y) \in \Pi$. Dit kan alleen als beide termen in het linkerlid constant zijn:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu \quad \text{en} \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \nu$$

met zekere constanten μ en ν. We zien dus dat niet-triviale oplossingen van het probleem (246) de produkten zijn van de niet-triviale oplossingen van de bekende problemen

$$\begin{cases} X''(x) = \mu X(x), & x \in [0, L], \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} Y''(y) = \mu Y(y), & y \in [0, H], \\ Y(0) = Y(H) = 0. \end{cases}$$

Deze zijn

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad \text{als} \quad \mu = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

en

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\pi m y}{H}\right) \quad \text{als} \quad \nu = -\left(\frac{\pi m}{H}\right)^2$$

waarin $n, m = 1, 2, 3, \ldots$. De conclusie: *Het probleem* (246) *heeft niet-triviale oplossingen dan en slechts dan als*

$$\lambda = -\left(\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + \frac{\pi^2 m^2}{H^2}\right), \quad n, m \geq 1. \tag{247}$$

Deze oplossingen zijn veelvouden van

$$R_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{H}\right),$$

resp.

We hebben dus bewezen dat iedere functie

$$u_{n,m}(x, y, t) = e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + \frac{\pi^2 m^2}{H^2}\right) a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{H}\right)$$

zowel aan de differentiaalvergelijking (241) als de beide randvoorwarden (242) en (243) voldoet. Zo'n lineaire combinatie

$$u(x, y) = \sum_{n,m \geq 1} D_{n,m} e^{-\left(\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + \frac{\pi^2 m^2}{H^2}\right) a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{H}\right) \tag{248}$$

voldoet ook aan de beginvoorwaarde (244) precies dan als $D_{n,m}$ gegeven zijn door (240).

♡ **Opmerking.** In twee- en hoger dimensionale ruimtes is er een grote variatie aan vormen van de definitiegebied $\Pi \subset \mathbb{R}^k$. Dit kan bijvoorbeeld een cirkelschijf of een bol zijn. Toch heeft het *eigenwaardeprobleem* voor de Laplace operator

$$\begin{cases} \Delta R(x) = \lambda R(x), & x \in \Pi, \\ R(x) = 0, & x \in \partial\Pi, \end{cases}$$

niet-triviale oplossingen slechts voor een aftelbaar oneindige rij van negatieve λ's, die *eigenwaarden* heten. ♡

8.3 Meerdimensionale Fourierintegralen

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een tweemaal continu differentieerbare functie met integreerbare $|f|, |f'|$ en $|f''|$. Dan leert Stelling 4.9 in Hoofdstuk 4 en de opmerking daarna dat

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds \tag{249}$$

met

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\xi} f(\xi)\, d\xi\,. \tag{250}$$

De formule (249) heet de *Fourierinverse formule* terwijl (250) de *Fouriertransformatie* defineert.

Neem nu een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ van twee variabelen x_1 en x_2 die tweemaal continu differentieerbaar is met convergente integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f|\, dx_1\, dx_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dx_1\, dx_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| dx_1\, dx_2,$$

voor $i, j = 1, 2$. De formule (249) geeft dan

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s_1, x_2) e^{is_1 x_1}\, ds_1$$

met

$$F(s_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, x_2) e^{-is_1 \xi_1}\, d\xi_1.$$

Voor elke $s_1 \in \mathbb{R}$, geldt dan voor $F(s_1, x_2)$ als de functie van x_2:

$$F(s_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s_1, s_2) e^{is_2 x_s}\, ds_2$$

waarin
$$\widehat{f}(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s_1, \xi_2) e^{-is_2\xi_2}\, d\xi_2 \,.$$
Dus
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s_1, s_2) e^{i(s_1x_1+s_2x_2)}\, ds_1 ds_2 \tag{251}$$
met
$$\widehat{f}(s_1, s_2) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 \,. \tag{252}$$
De formule (252) definieert de *twee-dimensionale Fouriertransformatie*. Met de *twee-dimensionale Fourierinversie formule* (251) kan men de functie f van de Fouriergetransformeerde functie $\widehat{f}$ reconstrueren.

De formules (251) en (252) zijn eenvoudig te generaliseren naar willekeurige $n \geq 1$. Zijn $x, s, \xi \in \mathbb{R}^n$ en
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(s)\, ds := \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n \text{ stuks}} g(s_1, s_2, \ldots, s_n)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_n \,.$$
Voor een 'nette' functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hebben we dan
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(s) e^{i(s\cdot x)}\, ds \tag{253}$$
met
$$\widehat{f}(s) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(s\cdot\xi)} f(\xi)\, d\xi \,. \tag{254}$$
De formule (254) definieert de *n-dimensionale Fouriertransformatie* $f \mapsto \mathcal{F}f = \widehat{f}$.

De Fouriertransformatie van functies op $\mathbb{R}^n$ heeft de volgende eigenschappen, die de rechtstreekse generalisaties van Stellingen 4.10 en 4.11 zijn. Bijv. als $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu en *absoluut integreerbaar* is, d.w.z.
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty \,,$$
dan geldt
$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) &= \widehat{f}(s-a) \quad \text{als} \quad g(x) = e^{i(a\cdot x)} f(x), \\ \widehat{g}(s) &= e^{i(a\cdot s)} \widehat{f}(s) \quad \text{als} \quad g(x) = f(x+a), \end{aligned}$$

voor iedere $a \in \mathbb{R}^n$.

Als $f : \mathbb{R}^n \to R$ continu differentieerbaar is en $f(x)$ en $g(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ absoluut integreerbaar zijn, dan net zoals in Stelling 4.8

$$\widehat{g}(s) = is_j \widehat{f}(s).$$

Hieruit volgt dat

$$(\widehat{\Delta f})(s) = -\|s\|^2 \widehat{f}(s) \tag{255}$$

waarin $\|s\|^2 = (s \cdot s) = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2$ en

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

(de *n-dimensionale Laplace operator*).

Net als voor twee scalaire functies, kunnen we het *convolutieproduct* $f * G$ van twee functies $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiëren door

$$(f * G)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) G(x - \xi) \, d\xi \, .$$

Zoals in Stelling 5.3 geldt dan dat

$$(\widehat{f * G})(s) = \widehat{f}(s) \; \widehat{G}(s)$$

voor zover de leden van deze gelijkheid gedefinieerd zijn (bijv. als beide f en G continu, begrensd en absoluut integreerbaar zijn).

8.4 Meerdimensionale distributies

Hier bespreken we kort een generalisatie van distributies naar meerdimensionale ruimten en hun toepassingen bij de analyse van partiële differentiaalvergelijkingen op $\mathbb{R}^n$.

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een element van

$$\mathcal{C} := \{ f \in C^\infty : f(x) = 0 \ \text{ voor } \ \text{alle } \ \|x\| \geq r_f \}$$

of

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty : \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = O\left(\frac{1}{\|x\|^j} \right), \ \|x\| \to \infty \ \forall k_i, j \in \mathbb{N} \right\}.$$

De verzameling $V = \mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$ heet een *ruimte van testfuncties*. Een lineaire afbeelding

$$\mathcal{D} : V \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \mathcal{D}(f)$$

heet een *distributie*.

Iedere stuksgewijs continue en begrensde functie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieert de *reguliere distributie*:

$$f \mapsto \mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx \; .$$

Hierin kan men ook sommige onbegrensde functies φ gebruiken.

De distributie

$$f \mapsto \mathcal{D}_\delta(f) := f(0)$$

heet de *Dirac deltadistributie*. Hoewel deze distributie niet regulier is, schrijft men

$$\mathcal{D}_\delta(f) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(x)\, dx = f(0)$$

waarin $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$ de *delta-functie* op $\mathbb{R}^n$:

$$\delta(x) = 0 \text{ voor } x \neq 0 \;\text{ maar } \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, dx = 1.$$

$\diamondsuit$ **Voorbeeld.** De delta-functie heeft verschillede representaties in verschillende coördinaatstelsels in $\mathbb{R}^n$. Bijv. voor $n = 3$ gebruik men vaak de *bolcoördinaten* (ρ, φ, θ), waarmee de componenten van een vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

worden geschreven als

$$\begin{cases} x_1 &= \rho \sin\theta \cos\varphi \,, \\ x_2 &= \rho \sin\theta \sin\varphi \,, \\ x_3 &= \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Hierin $0 \leq \rho < \infty,\; 0 \leq \varphi < 2\pi$ en $0 \leq \theta < \pi$. Dan geldt

$$\delta(\rho, \varphi, \theta) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho^2} \; .$$

Inderdaad, $\delta(\rho,\varphi,\theta)=0$ voor alle φ,θ en $\rho>0$ en

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\delta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \delta(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\\
&= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho^2}\,\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta\\
&= \left(\int_0^\infty \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho^2}\rho^2 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)\\
&= 2\int_0^\infty \delta(\rho)d\rho = \int_{-\infty}^\infty \delta(\rho)d\rho = 1.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Zij $\mathcal{D}:V\to\mathbb{R}$ een distributie op $V=\mathcal{C}$ of $\mathcal{S}$. We kunnen het *produkt* $\eta\mathcal{D}$ als volgt definiëren. Zij $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ een functie zó dat $\eta f\in V$ voor alle $f\in V$. Dan is

$$(\eta\mathcal{D})(f) \;:=\; \mathcal{D}(\eta f).$$

Voor een reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ geldt dan dat

$$\eta\mathcal{D}_\varphi(f)=\mathcal{D}_{\eta\varphi}(f).$$

Beschouw nu een lineair (affiene) substitutie

$$y=Ax-b,\quad x,y,b\in\mathbb{R}^n,\quad A\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

met $\det A\neq 0$. De distributie

$$\widetilde{\mathcal{D}}(f) \;:=\; \mathcal{D}(\underset{\sim}{f}) \text{ waarin } \underset{\sim}{f}(y)=\frac{1}{|\det A|}f\left(A^{-1}(y+b)\right)$$

heet de *lineair-getransformeerde* van $\mathcal{D}$. Voor een reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ geldt dan dat

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\varphi(f)=\mathcal{D}_{\tilde\varphi}(f) \;\text{ waarin } \tilde\varphi(x)=\varphi(Ax-b).$$

Er geldt ook dat

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\delta(f)=\tilde f(0)=\frac{1}{|\det A|}f(A^{-1}b)$$

waaruit volgt

$$\delta(Ax)=\frac{1}{|\det A|}\delta(x) \;\text{ en }\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\delta(x-b)\,dx=f(b)$$

Net zoals de Fouriertransformatie van 1-dimensionale distributies, definieert men de Fouriertransformatie van meerdimensionale distributies. Merk op dat $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ voor iedere $f \in \mathcal{S}$. De distributie

$$\widehat{\mathcal{D}}(f) \; := \; \mathcal{D}(\widehat{f}\,) \;\; \text{voor iedere} \;\; f \in \mathcal{S}$$

heet de *Fouriergetransformeerde distributie* van $\mathcal{D}$. We hebben de volgende resultaten:

1. Voor en reguliere distributie $\mathcal{D}_\varphi$ met absoluut integreerbare φ geldt dat $\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f)$.

2. Voor
$$\mathcal{D}_1(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$
geldt $\mathcal{D}_{\hat{1}}(f) \equiv \widehat{\mathcal{D}}_1(f) = (2\pi)^n f(0) = (2\pi)^n \mathcal{D}_\delta(f)$ zodat
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(s\cdot x)}\, dx = (2\pi)^n \delta(s)$$

3. Voor $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ geldt
$$\mathcal{D}_{\widehat{\delta}}(f) \equiv \widehat{\mathcal{D}}_\delta(f) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \mathcal{D}_1(f)$$
zodat $\widehat{\delta}(s) = 1$.

4. Voor de *afgeleide distributie*
$$\mathcal{D}'_{x_j}(f) := -\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$
geldt $\widehat{(\mathcal{D}'_{x_j})} = i x_j \widehat{\mathcal{D}}$.

Ten slote kunnen we *meerdimensionale functies van Green* introduceren. Zij L een differentiaaloperator met constante coëfficiënten. Een functie $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heet de *functie van Green van L* als

$$LG(x) = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

d.w.z. $(L\mathcal{D}_G)(f) = f(0)$ voor alle $f \in V$. Als bij de functie

$$v(x) = (G * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\xi)u(x-\xi)\, d\xi$$

een reguliere distributie $\mathcal{D}_v$ hoort, dan

$$(L\mathcal{D}_v)(f) = \mathcal{D}_u(f) \quad \text{voor alle} \quad f \in V\,,$$

ofwel is v een *gegeneraliseerde oplossing* van $Lv = u$.

◇ **Voorbeeld.** Bereken de functie van Green van de differentiaaloperator $L = 1 - \Delta$, waarin Δ de Laplace operator in $\mathbb{R}^3$ is. We hebben

$$(Lv)(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x_3^2} \right).$$

De functie van Green van L voldoet aan de vergelijking

$$(1-\Delta)G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{256}$$

Dit moeten we als een vergelijking voor distributies interpreteren. De Fouriertransformatie van (256) levert

$$(1 + \|\mathbf{s}\|^2)\widehat{G}(\mathbf{s}) = 1$$

ofwel

$$\widehat{G}(\mathbf{s}) = \frac{1}{1+\|\mathbf{s}\|^2}, \qquad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3.$$

Daarmee is de Fouriergetransformeerde $\widehat{G}$ van de functie G gevonden. Om de functie G te vinden gebruiken we de Fourierinverse formule (253) met $n = 3$:

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{s})}}{1+\|\mathbf{s}\|^2}\, d\mathbf{s}\ .$$

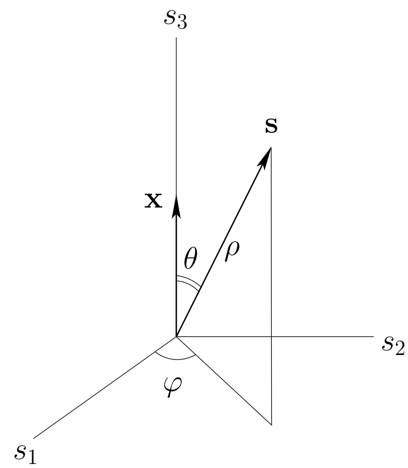
Deze integraal kunnen we op expliciete manier berekenen in de bolcoördinaten:

$$\begin{cases} s_1 &= \rho \sin\theta \cos\varphi\,, \\ s_2 &= \rho \sin\theta \sin\varphi\,, \\ s_3 &= \rho \cos\theta. \end{cases}$$

We nemen aan dat

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\mathbf{x}\| \end{pmatrix}$$

(zie figuur).



Dan

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i\|\mathbf{x}\|\rho\cos\theta}}{1+\rho^2}\, \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \underbrace{\left(\int_0^\pi e^{i\|\mathbf{x}\|\rho\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \right)}_{I} \, d\rho. \end{aligned}$$

Voor de integraal I geldt

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^\pi e^{i\|\mathbf{x}\|\rho\cos\theta} d(\cos\theta) &= \int_{-1}^1 e^{i\|\mathbf{x}\|\rho\mu}\, d\mu \\ &= \frac{1}{i\|\mathbf{x}\|\rho} e^{i\|\mathbf{x}\|\rho\mu} \Big|_{\mu=-1}^{\mu=1} &= \frac{2}{\|\mathbf{x}\|\rho} \frac{e^{i\|\mathbf{x}\|\rho} - e^{-i\|\mathbf{x}\|\rho}}{2i} \\ &= \frac{2}{\|\mathbf{x}\|\rho} \sin(\|\mathbf{x}\|\rho). \end{aligned}$$

Dus krijgen we

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \frac{2}{\|\mathbf{x}\|\rho} \sin(\|\mathbf{x}\|\rho)\, d\rho \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2\|\mathbf{x}\|} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\rho\sin(\|\mathbf{x}\|\rho)}{1+\rho^2}\, d\rho}_{J}. \end{aligned}$$

De laatste integraal is de bekende *integraal van Laplace*. Dus (zie opgave 8(b) in paragraaf 4.5)

$$J = \frac{\pi}{2}\, e^{-\|\mathbf{x}\|} ,$$

waaruit volgt dat

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}\, e^{-\|\mathbf{x}\|} \tag{257}$$

de functie van Green van de differentiaaloperator $L = 1 - \Delta$ is.

Met deze functie kunnen we een (gegeneraliseerde) oplossing van de inhomogene vergelijking

$$(1-\Delta)v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

schrijven als

$$v(\mathbf{x}) = (G * u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

voor zover deze integraal een continue functie definiëert (bijv. als $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ een continue begrensde en absoluut integreerbare functie is). $\diamondsuit$

Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling, die de wiskundige interpretatie van de formule (143) in Hoofdstuk 6 geeft.

Stelling 8.1 *De functie van Green van de Laplace-operator*

$$L = \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

met $n = 2$ *en* 3 *wordt gegeven voor* $\mathbf{x} \neq 0$ *door*

$$\begin{aligned} n = 2: &\qquad G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) , \\ n = 3: &\qquad G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|} . \end{aligned}$$

8.5 Opgaven

1. Zij $\Pi = \{(x, y) : x \in [0, L],\ y \in [0, H]\}$ met $L, H > 0$. Bepaal voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ het probleem

$$\begin{cases} \Delta R(x,y) = \lambda R(x,y) & (x,y) \in \Pi, \\ \frac{\partial}{\partial x} R(x,y)\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} R(x,y)\Big|_{x=L} = 0 & \text{voor alle } \ y \in [0, H], \\ \frac{\partial}{\partial y} R(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y} R(x,y)\Big|_{y=H} = 0 & \text{voor alle } \ x \in [0, L], \end{cases}$$

   een niet-triviale oplossing heeft en schrijf al die oplossingen op.

2. Bereken de Fouriergetransformeerde van $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$ waarin $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})$.

3. Bereken $\widehat{f}$ voor de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = e^{i(a \cdot x)}$ met $a \in \mathbb{R}^n$. *Let op*: $\widehat{f}$ bestaat alleen als distributie.

4. (Uit L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Course of Theoretical Physics, Volume 2)

   Een scalaire potentiaal $\varphi(\mathbf{r}, t)$ van het elektromagnetische veld geproduceert door een ladingsverdeling met dichtheid $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\ .$$

   Schrijf de potentiaal φ van een bewegende puntlading q met de positievector

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

   als een continue superpositie van *harmonische vlakke golven*, d.w.z. bereken $\Phi(\mathbf{k})$ en $\omega(\mathbf{k})$ in de integraal

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} d\mathbf{k}.$$

Inhoudsopgave