

Deeltentamen I Fouriertheorie WISN201

9 november 2007, 9.00-12.00 uur

- Bij dit deeltentamen mogen GEEN dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en (grafische) rekenmachine gebruikt worden.
- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer EN de naam van je werkcollegeleider (en/of groepsnummer).
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.

Opgave 1 [15pt] Bepaal of de volgende reeksen convergeren of divergeren:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Opgave 2 [15pt] Bepaal of de volgende oneigenlijke integralen convergeren of divergeren:

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad (b) \int_0^{\infty} \left(e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}\right) dx \quad (a, b > 0)$$

Opgave 3 [25pt] De 2π -periodieke functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} (2a)^{-1} & \text{als } |x| < a \\ (4a)^{-1} & \text{als } |x| = a \\ 0 & \text{als } a < |x| \leq \pi \end{cases}$$

waarin $0 < a < \pi$.

(a) Bereken de Fouriercoëfficiënten \hat{f}_n van f .

(b) Laat zien dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt: $f(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{na} \cos(nx)$.

(c) Bereken hiermee $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ en $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Opgave 4 [25pt] Zij $a > 0$.

(a) Bereken de Fourier getransformeerde $\hat{f}(s)$ van de functie $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$.

Hint: Gebruik de Fourier inversie formule voor $g(x) = e^{-a|x|}$.

(b) Laat zien dat $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$.

Opgave 5 [20pt] Bereken:

$$(a) \sum_{n,k \geq 2} \frac{1}{n^k} \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$