Uitwerking van het deeltentamen I Fouriertheorie
9 november 2007

1. (a) De reeks is divergent omdat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} \neq 0\,.$$

(b) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ is convergent. Dus is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ ook convergent volgens het majorantiecriterium omdat $n^n \geq n^2$ voor $n \geq 2$ en dus $a_n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$ voor $n \geq 2$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ is convergent wegens het integraalcriterium. Inderdaad, is de functie

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

positief en monotoon dalend voor $x \geq 2$. Verder geldt:

$$\int_2^{n+1}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{n+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \to \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

als $n \to \infty$.

2. (a) De functie

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

is continu op $(0,1]$. Bovendien geldt voor alle $x \in (0,1]$ dat

$$\left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right| \leq |\ln x|\,.$$

De oneigenlijke integraal $I = \int_0^1 |\ln x| dx$ convergeert:

$$I = -\int_0^1 (\ln x)dx = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[x\ln(x) - x\right]_\varepsilon^1 = 1 + \underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\ln\,\varepsilon}_{0} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon}_{0} = 1.$$

Uit de majorantiestelling voor oneigenlijke integralen volgt dan de (absolute) convergentie van $\int_0^1 f(x)dx$.

(b) De substitutie $x = 1/y$ geeft

$$J = \int_0^\infty \left(e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}\right)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2y^2} - e^{-b^2y^2}}{y^2}\,dy\,.$$

Dus

$$J = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-a^2y^2} - e^{-b^2y^2}}{y^2}\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-a^2y^2}}{y^2}\,dy}_{I_2} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-b^2y^2}}{y^2}\,dy}_{I_3}\,.$$

Uit de Tylorreeks voor e^x in $x = 0$ blijkt dat

$$e^{-a^2y^2} - e^{-b^2y^2} = (b^2 - a^2)y^2 + O(y^4).$$

Dus is de functie

$$f(y) = \frac{e^{-a^2y^2} - e^{-b^2y^2}}{y^2}$$

continu op $(0, 1]$ en $f(y) \to (b^2 - a^2)$ als $y \downarrow 0$. Dit impliceert de convergentie van I_1.
We hebben

$$\frac{e^{-a^2y^2}}{y^2}\ ,\ \frac{e^{-b^2y^2}}{y^2} < \frac{1}{y^2}$$

voor $y \geq 1$ en de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty \frac{dy}{y^2}$ is convergent. De integralen I_2 en I_3 dus ook convergeren wegens de majorantiestelling.
Conclusie: De integraal J is convergent.

3. (a) Enig rekenwerk:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi a}\int_{-a}^{a} e^{-inx}dx = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{e^{-ina}}{-in} - \frac{e^{ina}}{-in}\right) = \frac{1}{2\pi na}\left(\frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(na)}{na}
\end{aligned}$$

als $n \neq 0$ en

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\,2a\,\frac{1}{2a} = \frac{1}{2\pi}\,.$$

(b) De functie $f(x)$ is 2π-periodiek en stuksgewijs continu differentieerbaar. Bovendien geldt voor ieder discontinuïteitspunt $x = \pm a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ dat

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = \frac{1}{4a} = f(x)\,.$$

De Fourier inversie formule geeft dan voor iedere $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx} = \widehat{f}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\widehat{f}_n e^{inx} + \widehat{f}_{-n}e^{-inx}),$$

waarin de limiet bestaat en de reeks convergeert. Dus

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(na)}{na}e^{inx} + \frac{\sin(-na)}{(-na)}e^{-inx}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{na}\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{na}\cos(nx)\,.
\end{aligned}$$

(c) Er geldt:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{na}$$

Voor $a = 1$ hebben we

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$$

en dus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}\,.$$

Voor $a = \frac{\pi}{2}$ hebben we in de formule voor $f(0)$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{als} \quad n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{als} \quad n = 2k, \quad\; k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

en dus

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

waaruit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

volgt.

4. (a) Ten eerste is functie $g(x) = e^{-a|x|}$ continu en stuksgewijs continu-diferentieerbaar. Verder is g absoluut integreerbaar omdat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{2}{a} < \infty.$$

We hebben

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} = \int_{-\infty}^{0} e^{-ist}e^{at}dt + \int_0^{\infty} e^{-ist}e^{-at}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(is-a)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(is+a)t}dt \\ &= \frac{1}{a - is} + \frac{1}{a + is} = \frac{2a}{a^2 + s^2}\,. \end{aligned}$$

Dus is $\widehat{g}$ continu en

$$|\widehat{g}(s)| = O\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad \text{als} \quad s \to \pm\infty$$

waaruit volgt dat de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(s)e^{isx}\,ds$$

(absoluut) convergent is voor elke $x \in \mathbb{R}$. De Fourier inversie formule impliceert dan dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(s)e^{isx}\,ds = g(x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Merk nu op dat $\widehat{g}(s) = 2af(s)$. Dit geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{isx}ds = \frac{\pi}{a}e^{-a|x|} \quad \text{ofwel} \quad \widehat{f}(-x) = \frac{\pi}{a}e^{-a|x|}.$$

De substitutie $x = -s$ levert

$$\widehat{f}(s) = \frac{\pi}{a}e^{-a|s|}.$$

(b) De functie $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$ is continu differentieerbaar en beide oneigenlijke integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

convergeren omdat $|f(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $|f(t)|^2 = O\left(\frac{1}{t^4}\right)$. De formule van Parseval/Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds$$

impliceert dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{a^2}e^{-2a|s|}ds = \frac{\pi}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-2as}ds = \frac{\pi}{2a^3}\,.$$

5. (a) We gebruiken twee bekende formules:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{en} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{als} \quad |\lambda| < 1\,.$$

Er geldt (met $\lambda = \frac{1}{n} < 1$ voor $n \geq 2$):

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^k - 1 - \frac{1}{n}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1\,.\end{aligned}$$

Dus hebben we voor iedere $N, K \geq 2$:

$$A_{N,K} := \sum_{n=2}^{N}\left(\sum_{k=2}^{K}\frac{1}{n^k}\right) < 1\,.$$

Neem een partiële som S_M van de reeks

$$\sum_{n,k\geq 2}\frac{1}{n^k}$$

met $M \geq 1$ termen die allemaal positief zijn. Als N en K voldoende groot zijn, dan $S_M < A_{N,K} < 1$. Dus zijn de partiële sommen van deze reeks naar boven begrensd. Dit impliceert dat de reeks (absoluut) convergeert en dat voor iedere volgorde van de optelling van zijn termen geldt

$$\sum_{n,k\geq 2}\frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right) = 1.$$

(b) We schrijven

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx}_{I_2}$$

waarbij de oneigenlijke integraal I_1 convergent is wegens Opgave 2(a). De substitutie $x = 1/y$ laat zien dat

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{1+\frac{1}{y^2}}\,\frac{dy}{y^2} = -\int_0^1 \frac{\ln y}{1+y^2}\,dy$$

ofwel $I_2 = -I_1$. Dus $I = I_1 - I_1 = 0$ en de conclusie is

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$

Alternatief: De substitutie $x = e^y$ levert

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{ye^y}{1+e^{2y}}\,dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{e^{-y}+e^y}\,dy.$$

De continue functie

$$h(y) = \frac{y}{e^{-y}+e^y}$$

is absoluut integreerbaar, omdat

$$|h(y)| = \frac{|y|}{e^{-y}+e^y} = O\left(|y|e^{-|y|}\right) \quad \text{voor} \quad y \to \pm\infty$$

en de functie $|y|e^{-|y|}$ is integreerbaar. Bovendien is h oneven: $h(-y) = -h(y)$. Dus $I = 0$.