Uitwerking van het deeltentamen II Fouriertheorie
30 januari 2008

Opgave 1. 1. Integreer $w''(x) = -1$ twee keer:

$$\begin{aligned} w'(x) &= -x + A, \\ w(x) &= -\frac{x^2}{2} + Ax + B, \end{aligned}$$

waarin $A, B \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn. Uit de voorwaarden $w(0) = w(1) = 0$ volgt dan dat $B = 0$ en $A = \frac{1}{2}$. Dus

$$w(x) = \frac{x(1-x)}{2} \ .$$

2. We hebben

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - w'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \ .$$

Er geldt ook

$$\begin{aligned} v(0,t) &= u(0,t) - w(0) = 0 - 0 = 0, \\ v(1,t) &= u(1,t) - w(1) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

en

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x) \ = \ 0 - w(x) \ = \ -w(x).$$

3. We beschouwen een functie met periode 2, die is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} w(x) & \text{voor} \ \ x \in [0,1], \\ -w(-x) & \text{voor} \ \ x \in [-1,0), \end{cases}$$

voor $x \in [-1,1]$. De oneven functie f is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$ en heeft periode $T = 2$. Deze functie kan geschreven worden als de convergente Fourier sinus-reeks:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(\omega n x) \qquad \text{met} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega n t) \, dt$$

waarin

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \ .$$

De Fouriercoëfficiënten b_n zijn:

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(t) \sin(\pi n t) \, dt \ = \ 2 \int_0^1 \sin(\pi n t) w(t) \, dt \ = \ \int_0^1 (t - t^2) \sin(\pi n t) \, dt \ .$$

Met partiële integratie krijgen we

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \sin(\pi n t) \, dt &= -\frac{1}{\pi n} \cos(\pi n) \\ \int_0^1 t \cos(\pi n t) \, dt &= \frac{\cos(\pi n) - 1}{(\pi n)^2} \ . \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 \sin(\pi n t)\, dt &= -\frac{1}{\pi n} t^2 \cos(\pi n t)\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 t\cos(\pi n t)\, dt \\ &= -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n) + \frac{2(\cos(\pi n) - 1)}{(\pi n)^3}\ .\end{aligned}$$

Dit geeft

$$b_n = \frac{2(1-\cos(\pi n))}{(\pi n)^3} = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even,} \\ \dfrac{4}{(\pi n)^3} & \text{als } n \text{ oneven.}\end{cases}$$

4. We zoeken een oplossing van

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

in de vorm $v(x,t) = X(x)T(t)$. Dit geeft

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

voor een $\lambda = \text{const.}$ Het probleem

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \quad x \in [0,1], \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

heeft een niet-triviale oplossing dan en slechts dan als $\lambda = \lambda_n$ met

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Voor iedere $n \geq 1$ wordt de niet-triviale oplossing gegeven door

$$X_n(x) = \sin(\pi n x)\ .$$

De differentiaalvergelijking

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

heeft een oplossing

$$T(t) = e^{\lambda t}\ .$$

De functie

$$e^{\lambda_n t} X_n(x) = e^{-\pi^2 n^2 t}\sin(\pi n x)$$

voldoet dus aan de partiële differentiaalvergelijking $v_t = v_{xx}$ en de randvoorwaarden $v(0,t) = v(1,t) = 0$ voor alle $t \geq 0$. De lineaire combinatie

$$\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\pi^2 n^2 t}\sin(\pi n x)$$

voldoet ook aan de beginvoorwaarde $v(x,0) = -w(x)$ voor alle $x \in [0,1]$ als

$$a_n = -b_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even,} \\ -\dfrac{4}{(\pi n)^3} & \text{als } n \text{ oneven.}\end{cases}$$

De conclusie:

$$v(x,t) = -\frac{4}{\pi^3} \sum_{\text{oneven } n\geq 1} \frac{e^{-\pi^2 n^2 t}}{n^3} \sin(\pi n x)$$

is de oplossing van de warmtevergelijking

$$v_t = v_{xx}, \qquad x \in [0,1],\ t \geq 0$$

die voldoet aan de rand- en de beginvoorwaarden

$$\begin{cases} v(0,t) = v(1,t) = 0 & \text{voor alle } \ t \geq 0, \\ v(x,0) = -w(x) & \text{voor alle } \ x \in [0,1]. \end{cases}$$

5. We gebruiken de volgende elementaire schattingen:

$$|\sin(\pi n x)| \leq 1 \qquad \text{voor alle } \ x \in \mathbb{R}$$

en

$$e^{-\pi^2 n^2 t} \leq e^{-\pi^2 t} \qquad \text{voor alle } \ n \geq 1 \ \text{ en } \ t \geq 0.$$

Er geldt

$$\begin{aligned} |v(x,t)| &\leq \frac{4}{\pi^3} \sum_{\text{oneven } n\geq 1} \frac{e^{-\pi^2 n^2 t}}{n^3} |\sin(\pi n x)| \leq \frac{4}{\pi^3} \sum_{\text{oneven } n\geq 1} \frac{e^{-\pi^2 n^2 t}}{n^3} \\ &\leq \frac{4}{\pi^3} \sum_{\text{oneven } n\geq 1} \frac{e^{-\pi^2 t}}{n^3} = \left(\frac{4}{\pi^3} \sum_{\text{oneven } n\geq 1} \frac{1}{n^3} \right) e^{-\pi^2 t} \\ &< C e^{-\pi^2 t}, \end{aligned}$$

waarin

$$C = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} < \infty$$

omdat de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ convergent is. Dus geldt voor alle $x \in [0,1]$ en $t \geq 0$ dat

$$|v(x,t)| < C e^{-\pi^2 t}$$

Hieruit volgt dat $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$ voor alle $x \in [0,1]$ en dus

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{x(1-x)}{2} \qquad \text{voor alle } \ x \in [0,1].$$

Opgave 2 1. We kunnen op twee manieren werken:

Methode I: De functie G kan geschreven worden als $G(t) = H(t)w(t)$ waarin H de functie van Heaviside is en

$$w(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\ .$$

Dan is de (gegeneraliseerde) afgeleide van G

$$\begin{aligned} G'(t) &= H'(t)w(t) + H(t)w'(t) \ = \ \frac{1}{2}\sin(2t)\delta(t) + H(t)\cos(2t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin 0)\delta(t) + H(t)\cos(2t) \ = \ H(t)\cos(2t)\,, \end{aligned}$$

omdat $H'(t) = \delta(t)$ en $\eta(t)\delta(t) = \eta(0)\delta(t)$ voor iedere begrensde $\eta \in C^\infty$, dus ook voor $\eta = w$. Op vergelijkbare manier krijgen we

$$\begin{aligned} G''(t) &= H'(t)\cos(2t) - H(t)\, 2\sin(2t) \;=\; \cos(2t)\delta(t) - 4G(t) \\ &= (\cos 0)\delta(t) - 4G(t) \;=\; \delta(t) - 4G(t) \end{aligned}$$

ofwel $G''(t) + 4G(t) = \delta(t)$.

Methode II: We interpreteren de vergelijking $G''(t) + 4G(t) = \delta(t)$ als een distributie-vergelijking:

$$\mathcal{D}''_G(f) + 4\mathcal{D}_G(f) = f(0) \qquad \text{voor alle} \quad f \in \mathcal{C},$$

waarin $\mathcal{D}_G$ de reguliere distributie is die hoort bij G, nl.

$$\mathcal{D}_G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)\; dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\sin(2t)\; dt\,.$$

We hebben

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_G(f) &= -\mathcal{D}_G(f') = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f'(t)\sin(2t)\,dt, \\ &= -\frac{1}{2}\left[f(t)\sin(2t)\right]_0^R + \int_0^\infty f(t)\cos(2t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}f(0)\sin 0 + \int_0^\infty f(t)\cos(2t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\cos(2t)\,dt \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathcal{D}''_G(f) &= -\mathcal{D}'_G(f') = -\int_0^\infty f'(t)\cos(2t)\,dt, \\ &= -\left[f(t)\cos t\right]_0^R - 2\int_0^\infty f(t)\sin(2t)\,dt \\ &= f(0)\cos 0 - 2\int_0^\infty f(t)\sin t\,dt = f(0) - 4\mathcal{D}_G(f). \end{aligned}$$

Hierin is $R > 0$ zó dat $f(x) = 0$ voor alle $x \geq R$. Dus geldt $\mathcal{D}''_G(f) + 4\mathcal{D}_G(f) = f(0)$ voor iedere $f \in \mathcal{C}$.

2. Het convolutieprodukt is

$$(u * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)G(t-\tau)\; d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \tau^2)G(t-\tau)\; d\tau\,.$$

Als $t < -\pi$ dan $t - \tau < 0$ voor alle $\tau \in [-\pi, \pi]$ en dus $G(t-\tau) \equiv 0$. Hieruit volgt dat in dit geval $(u * G)(t) = 0$.
Als $|t| \leq \pi$ dan $G(t-\tau) \equiv 0$ voor $\tau \in [t, \pi]$. Dus

$$(u * G)(t) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{t} (\pi^2 - \tau^2)\sin(2(t-\tau))\; d\tau = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2 - t^2}{4} - \frac{\pi}{4}\sin(2t) - \frac{1}{4}(\cos t)^2\,.$$

Als $t > \pi$ dan $t - \tau > 0$ voor alle $\tau \in [-\pi, \pi]$ en dus

$$(u * G)(t) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \tau^2)\sin(2(t-\tau))\; d\tau = -\frac{\pi}{2}\sin(2t)\,.$$

De laatste twee integralen zijn speciale gevallen van

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{s}(\pi^2-\tau^2)\sin(2(t-\tau))\,d\tau \quad = \quad & \frac{1}{8}-\frac{\pi}{4}\sin(2t)-\frac{1}{4}(\cos t)^2\\ & +\frac{\pi^2-s^2+\frac{1}{2}}{4}\cos(2(t-s))\\ & -\frac{s}{4}\sin(2(t-s))\end{aligned}$$

voor $s=t$ en $s=\pi$ omdat

$$(\cos t)^2=\frac{1+\cos(2t)}{2}.$$

De conclusie: $(u*G)(t)=v(t)$ waarin

$$v(t)=\begin{cases} 0, & t<-\pi,\\ \frac{1}{4}+\frac{\pi^2-t^2}{4}-\frac{\pi}{4}\sin(2t)-\frac{1}{4}(\cos t)^2, & |t|\le\pi,\\ -\frac{\pi}{2}\sin(2t), & t>\pi.\end{cases}$$

3. De functie v is continu en willekeurig vaak differentieerbaar voor $t\neq\pm\pi$. Verder geldt

$$v'(t)=\begin{cases} 0, & t<-\pi,\\ -\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos(2t)+\frac{1}{4}(\sin 2t), & |t|\le\pi,\\ -\pi\cos(2t), & t>\pi,\end{cases}$$

en

$$v''(t)=\begin{cases} 0, & t<-\pi,\\ -\frac{1}{2}+\pi\sin(2t)+\frac{1}{2}\cos(2t), & |t|\le\pi,\\ 2\pi\sin(2t), & t>\pi.\end{cases}$$

Dus

$$v''(t)+4v(t)=\begin{cases}\pi^2-t^2, & |t|<\pi,\\ 0, & |t|\ge\pi.\end{cases}$$

Hiermee krijgen we dat

$$v(\pm\pi^-)=v(\pm\pi^+)=0,\quad v'(\pm\pi^-)=v'(\pm\pi^+)=0,\quad v''(\pm\pi^-)=v''(\pm\pi^+)=0.$$

Dus is v tweemaal continu-differentieerbaar en voldoet aan de differentiaalvergelijking $v''(t)+4v(t)=u(t)$ voor $t\in\mathbb{R}$.

Opgave 3 De afgeleide van de functie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^3+x+2$ voldoet aan

$$F'(x)=3x^2+1>1$$

voor alle $x\in\mathbb{R}$. Dus is F monotoon stijgend en $F(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat F inverteerbaar is, d.w.z. F^{-1} bestaat. Het gaat dus over niet-lineaire maar differentieerbare en globaal inverteerbare substituties in distributies. Verder kunnen we op twee manieren werken, die beide op de substitutie van variabelen in een integraal gebaseerd zijn.

Methode I: We moeten laten zien dat voor iedere testfunctie f geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^3+x+2)\;dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x+1)\;dx\;.$$

De formele substitutie $y = F(x)$ in de integraal geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x))\;dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(F^{-1}(y))}{|F'(F^{-1}(y))|}\,\delta(y)\;dy = \frac{f(F^{-1}(0))}{|F'(F^{-1}(0))|}\;.$$

In ons geval is $F(x) = x^3 + x + 2$. Dus is $F^{-1}(0) = -1$ omdat $x = -1$ de einige oplossing is van de vergelijking $F(x) = 0$. Verder is $F'(-1) = 4$ zodat

$$\frac{f(F^{-1}(0))}{|F'(F^{-1}(0))|} = \frac{f(-1)}{4}$$

en dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^3+x+2)\;dx = \frac{f(-1)}{4}.$$

Maar ook

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x+1)\;dx = \frac{f(-1)}{4}\;.$$

Daarmee is de formule

$$\delta(x^3+x+2) = \frac{1}{4}\delta(x+1)$$

bewezen.

Methode II: Eerst definieren we de niet-lineaire substitutie voor de reguliere distributie

$$\mathcal{D}_{\varphi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\;dx\,, \qquad f \in \mathcal{C},$$

waarin $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue functie is. Zij $\bar{\varphi}(x) \equiv \varphi(F(x))$. Bij deze functie hoort een andere reguliere distributie op $\mathcal{C}$, nl.

$$\mathcal{D}_{\bar{\varphi}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(F(x))\;dx$$

De substitutie $y = F(x)$ in deze integraal levert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(F(x))\;dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(F^{-1}(y))}{|F'(F^{-1}(y))|}\,\varphi(y)\;dy\,.$$

Laat voor $y \in \mathbb{R}$

$$\underline{f}(y) \equiv \frac{f(F^{-1}(y))}{|F'(F^{-1}(y))|}$$

zijn. Dan definieren we de *substitutie* in een distributie $\mathcal{D} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ met de formule

$$\overline{\mathcal{D}}(f) \equiv \mathcal{D}_{\varphi}(\underline{f})\,, \qquad f \in \mathcal{C}.$$

Voor reguliere distributies geldt dus $\overline{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_{\bar{\varphi}}(f)$. Voor de delta-distributie $\mathcal{D}_\delta(f) = f(0)$ krijgen we

$$\overline{\mathcal{D}}_\delta(f) = \mathcal{D}_\delta(\underline{f}) = \frac{f(F^{-1}(0))}{|F'(F^{-1}(0))|} \,.$$

In ons geval is $F(x) = x^3 + x + 2$. Dus is $F^{-1}(0) = -1$ omdat $x = -1$ de einige oplossing is van de vergelijking $F(x) = 0$. Verder is $F'(-1) = 4$ zodat

$$\overline{\mathcal{D}}_\delta(f) = \frac{f(-1)}{4}.$$

Maar

$$f(-1) = \tilde{\mathcal{D}}_\delta(f)\,, \qquad f \in \mathcal{C},$$

waarin $\tilde{\mathcal{D}}(f) \equiv \mathcal{D}(\underset{\sim}{f})$ met $\underset{\sim}{f}(x) \equiv f(x-1)$. Dus

$$\overline{\mathcal{D}}_\delta(f) = \frac{1}{4}\tilde{\mathcal{D}}_\delta(f)\,, \qquad f \in \mathcal{C}.$$

Zij $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x+1)$. Als we formeel schrijven

$$\overline{\mathcal{D}}_\delta(f) \equiv \mathcal{D}_{\bar{\delta}}(f) \quad \text{en} \quad \tilde{\mathcal{D}}_\delta(f) \equiv \mathcal{D}_{\tilde{\delta}}(f)\,,$$

dan geldt

$$\mathcal{D}_{\bar{\delta}}(f) = \frac{1}{4}\mathcal{D}_{\tilde{\delta}}(f)\,, \qquad f \in \mathcal{C},$$

ofwel

$$\delta(x^3 + x + 2) = \frac{1}{4}\delta(x+1).$$