Fouriertheorie, uitwerkingen paragraaf 1.6

opgaven 1,2,3 (door Yuri Kuznetsov), 4, 5, 6, 15 (door Quintijn Puite), 8, 13 (door Sander Zwegers), 9, 11a (door Michiel Hochstenbach), 10, 12, 14 (door Jan Stienstra)

Opgave 1.6.1

Schrijf $z = re^{i\varphi}$. Dan $z^2 = r^2 e^{2i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. We moeten dus hebben:

$$\begin{aligned} r^2 &= 1, \\ e^{2i\varphi} &= e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \varphi \bmod 2\pi. \end{aligned}$$

Dus $r = 1$ en

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{of} \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

Dit geeft

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

en

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Opgave 1.6.2

a. We hebben

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Omdat

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$$

en de functie $y = \ln x$ continu is in $x = 1$, geldt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 1 = 0.$$

b. Er geldt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Dus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

omdat de functie $y = \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ onbegrensd monotoon stijgend is voor $x \geq 0$.

Opgave 1.6.3

We hebben

$$|a_n| = \left|\frac{e^{in}}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n},$$

omdat $|e^{i\varphi}| = 1$ voor iedere φ. Dus geldt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

ofwel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Opgave 1.6.4

a. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := \frac{2^n}{n!}$ $(n \geq 0)$. Merk op dat voor alle $n \geq 0$ geldt dat $a_n \neq 0$. Voorts geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

zodat volgens het quotiëntcriterium de reeks absoluut convergent is, dus zeker convergent.

Opmerking: Omdat alle termen positief zijn, vallen beide begrippen in dit geval natuurlijk samen. Idem voor de meeste volgende sommen.

b. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$ is convergent.

Bewijs: Er geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1,$$

dus volgens het wortelcriterium is de reeks absoluut convergent, en in het bijzonder convergent.

Alternatief bewijs: Voor $n \geq 8 > e^2$ geldt $\ln n \geq 2$, dus

$$\left|\frac{1}{(\ln n)^n}\right| = \frac{1}{(\ln n)^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bovendien is $\sum_{n\geq 8} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen, dus volgens het majorantiecriterium is ook $\sum_{n\geq 8} \frac{1}{(\ln n)^n}$ convergent. Zo ook derhalve $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

c. $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := \sin \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$ en $t_n := \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Uit het bestaan van deze limiet en de bekende convergentie van $\sum_{n\geq 1} t_n$ volgt nu met behulp van het limietcriterium dat $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Alternatief bewijs: De formule van Taylor leert:

$$\sin x = 0 + \mathcal{O}(x) \qquad (x \to 0)$$

en dus is

$$\sin \frac{1}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty)$$

Nu is $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen, dus volgens het lemietcriterium (zoals geformuleerd in de opmerking na Gevolg 1.19) is ook $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ convergent.

d. $\sum_{n\geq 1} \cos \frac{1}{n^2}$ is divergent.

Bewijs: Zij $a_n := \cos \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Er geldt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n^2} = \lim_{x\downarrow 0} \cos x \overset{\text{(continuiteit)}}{=} \cos 0 = 1 \neq 0$$

dus de termen van de reeks gaan niet naar 0; we weten dat de reeks dan niet convergent kan zijn.

Opmerking: Hier is de contrapositie van Lemma 1.6 toegepast, d.w.z.: het lemma "als A dan B" is toegepast in de redenering: "als niet B, dan ook niet A" (want zou toch A, dan ook B, in tegenspraak met de veronderstelling niet B).

e. $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ is convergent.

Bewijs: Volgens de formule van Taylor is

$$\cos x = 1 + 0 \cdot x + \mathcal{O}(x^2) \qquad (x \to 0)$$

en dus

$$1 - \cos \frac{1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty)$$

Nu is $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen, dus volgens (de herformulering van) het limietcriterium is ook $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ convergent.

f. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}$ is convergent.

Bewijs: Volgens de formule van Taylor is

$$\ln(1 + x) = 0 + \mathcal{O}(x) \qquad (x \to 0)$$

en dus

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

Derhalve

$$\frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty)$$

Nu is $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen, dus volgens (de herformulering van) het limietcriterium is ook $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}$ convergent.

Opgave 1.6.5

a. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})}$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})}$ $(n \geq 1)$ en $t_n := \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n-\frac{1}{2})}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - \frac{1}{2}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

Uit het bestaan van deze limiet en de bekende convergentie van $\sum_{n\geq 1} t_n$ volgt nu met behulp van het limietcriterium dat $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})}$ convergeert.

b. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ is divergent.

(Intuïtief: Voor grote n geldt $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. De reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergeert volgens een voorbeeld bij het integraalcriterium. Dus zal de gegeven reeks ook wel niet convergeren.)

Echt bewijs: Zij $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ en $t_n := \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ $(n \geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = 0$$

Uit het bestaan van deze limiet volgt met behulp van het limietcriterium dat als $\sum_{n\geq 1} t_n$ zou convergeren, dan ook $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Van deze laatste reeks weten we echter dat hij juist divergeert, dus $\sum_{n\geq 1} t_n$ moet ook wel divergeren.

Fout bewijs: Merk op dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

dus

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Nu is bekend dat $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergeert, "dus divergeert ook $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$". Hier zit de fout: deze conclusie mogen we niet op grond van $\frac{\sqrt{n}}{n+1} =$

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ trekken. Immers, ga maar na dat bijvoorbeeld ook $\frac{1}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, en dan zouden we net zo goed ook kunnen concluderen dat $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ divergeert... Dat uit bovenstaande limiet $1 \neq 0$ komt, betekent echter dat we de rollen van a_n en t_n ook kunnen omdraaien, hetgeen leidt tot de juiste redenering; zie de volgende bewijzen.

Alternatief bewijs: Merk op dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0 \quad \text{[belangrijk om op te merken!]}$$

Nu is bekend dat $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergeert, dus divergeert volgens het tweede deel van het limietcriterium (omdat deze limiet bestaat en ongelijk 0 is) ook $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right|$. Maar dit betekent precies dat $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ divergeert, want alle termen zijn positief.

Alternatief bewijs: Merk op dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1$$

dus

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$$

Als $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ een convergente reeks (van niet-negatieve reële termen) zou zijn, volgt uit (de herformulering van) het limietcriterium dat ook $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergeert. Van deze laatste reeks weten we echter dat hij juist divergeert, dus $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ moet ook wel divergeren.

c. $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}$ is divergent.

Bewijs: Merk op dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \quad \text{[belangrijk om op te merken!]}$$

Nu is bekend dat $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergeert, dus divergeert volgens het tweede deel van het limietcriterium (omdat deze limiet bestaat en ongelijk 0 is) ook $\sum_{n\geq 1}\left|\sin\frac{1}{n}\right|$. Maar dit betekent precies dat $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}$ divergeert, want alle termen zijn positief.

Alternatief bewijs: Merk op dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

Als $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}$ een convergente reeks (van niet-negatieve reële termen) zou zijn, volgt uit het limietcriterium wegens het bestaan van bovenstaande limiet dat ook $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ convergeert. Van deze laatste reeks weten we echter dat hij juist divergeert, dus $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}$ moet ook wel divergeren.

d. $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ is convergent.

Bewijs: Volgens de formule van Taylor is

$$\sin x = 0 + x + \mathcal{O}(x^2) \qquad (x\to 0)$$

en dus

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n\to\infty)$$

Nu is $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ een convergente reeks van niet-negatieve reële termen, dus volgens (de herformulering van) het limietcriterium is ook $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ convergent.

e. $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{n}{n^2+1}$ is divergent.

(Intuïtief: Voor grote n geldt $\sin\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$ dus de reeks zal wel niet convergeren.)

Echt bewijs: Zij $a_n := \frac{1}{n}$ $(n\geq 1)$ en $t_n := \sin\frac{n}{n^2+1}$ $(n\geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{t_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{n}{n^2+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n^2+1}}\cdot\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\sin\frac{n}{n^2+1}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}\right)\left(\lim_{x\downarrow 0}\frac{x}{\sin x}\right)=1\end{aligned}$$

Uit het bestaan van deze limiet volgt met behulp van het limietcriterium dat als $\sum_{n\geq 1} t_n$ zou convergeren, dan ook $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. Van deze laatste reeks weten we echter dat hij juist divergeert, dus $\sum_{n\geq 1} t_n$ moet ook wel divergeren.

Opgave 1.6.6

a. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ is divergent.

Bewijs: Zij $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ en $t_n := \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $(n \geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

Uit het bestaan van deze limiet volgt met behulp van het limietcriterium dat als $\sum_{n\geq 1} t_n$ zou convergeren, dan ook $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Van deze laatste reeks weten we echter dat hij juist divergeert, dus $\sum_{n\geq 1} t_n$ moet ook wel divergeren.

b. $\sum_{n\geq 1} \left(e^{n^{-2}} - 1\right)$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := e^{n^{-2}} - 1$ $(n \geq 1)$ en $t_n := \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^{-2}} - 1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \left[= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0\right] = 1$$

Uit het bestaan van deze limiet en de bekende convergentie van $\sum_{n\geq 1} t_n$ volgt nu met behulp van het limietcriterium dat $\sum_{n\geq 1} \left(e^{n^{-2}} - 1\right)$ convergeert.

c. $\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := ne^{-n} = \frac{n}{e^n}$ $(n \geq 0)$. Merk op dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $a_n \neq 0$. Voorts geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} = \tfrac{1}{e} = e^{-1} < e^0 = 1$$

zodat volgens het quotiëntcriterium de reeks absoluut convergent is, dus zeker convergent.

d. $\sum_{n\geq 1} n^n 2^{-\sqrt{n}}$ is divergent.

Bewijs: Zij $a_n := n^n 2^{-\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$. Er geldt voor alle $n \geq 2$ dat

$$a_n = n^n 2^{-\sqrt{n}} \geq 2^{n-\sqrt{n}} \geq 2^0 = 1$$

dus de termen van de reeks gaan niet naar 0; we weten dat de reeks dan niet convergent kan zijn.

e. $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := e^{-\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$ en $t_n := \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Merk op dat $\sum_{n\geq 1} t_n$ een reeks is met positieve reële termen. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} x^4 e^{-x} = 0$$

Uit het bestaan van deze limiet en de bekende convergentie van $\sum_{n\geq 1} t_n$ volgt nu met behulp van het limietcriterium dat $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ convergeert.

f. $\sum_{n\geq 1} 2^{-n+\ln n}$ is convergent.

Bewijs: Zij $a_n := 2^{-n+\ln n}$ $(n \geq 1)$. Merk op dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $a_n \neq 0$. Voorts geldt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{-n-1+\ln(n+1)}}{2^{-n+\ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\ln(n+1)-\ln n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{-1+\ln(\frac{n+1}{n})} = 2^{-1},\end{aligned}$$

zodat volgens het quotiëntcriterium de reeks absoluut convergent is, dus zeker convergent.

Alternatief bewijs: Er geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{-n+\ln n}|} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{-n+\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{n}\ln n} = \tfrac{1}{2}\cdot 2^0 = \tfrac{1}{2} < 1,$$

dus volgens het wortelcriterium is de reeks absoluut convergent, en in het bijzonder convergent.

Opgave 1.6.8

We berekenen de k-de partiële som

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{k} \ln(1-\frac{1}{n^2}) &= \sum_{n=2}^{k} \{\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln n\} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \ln n + \sum_{n=3}^{k+1} \ln n - 2\sum_{n=2}^{k} \ln n \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \ln n - \sum_{n=2}^{k} \ln n + \sum_{n=3}^{k+1} \ln n - \sum_{n=2}^{k} \ln n \\
&= \ln 1 - \ln k + \ln(k+1) - \ln 2 \\
&= -\ln 2 + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right),
\end{aligned}
$$

dus

$$
\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \ln(1-\frac{1}{n^2}) = \lim_{k\to\infty} \left(-\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = -\ln 2.
$$

De convergentie van de reeks volgt natuurlijk uit het bestaan van de limiet van de partiële sommen.

Opgave 1.6.9

$\sum e^{n(z^2+1)} = \sum w^n$ met $w = e^{z^2+1}$. Deze meetkundige reeks is alleen convergent als $|w| < 1$. Met $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ geldt $|w| = |e^{z^2+1}| = e^{Re(z^2+1)} = e^{x^2-y^2+1}$, dus $|w| < 1 \iff x^2 - y^2 + 1 < 0$, ofwel $y^2 > x^2 + 1$. (Schets een plaatje van $y^2 = x^2 + 1$, dit levert hyperbolen).

Opgave 1.6.10

a. Voor reële x met $|x| > 1$ en voor $n > |x|$ is

$$
\left|\frac{x^n}{x^2+n^2}\right| > \frac{|x|^n}{2n^2}
$$

Volgens een bekende standaard limiet is voor $|x| > 1$

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{2n^2} = \infty.
$$

Dus als $|x| > 1$ is gaan de termen van de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{x^2+n^2}$ niet naar 0. *Deze reeks convergeert dus niet als $|x| > 1$ is.*

Voor reële x met $|x| \leq 1$ is

$$\left|\frac{x^n}{x^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergeert. Volgens het majorantie kenmerk *convergeert de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{x^2+n^2}$ dus ook (voor $|x| \leq 1$).*

b. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ en $n \geq 1$ is

$$\left|\frac{\sin(x^n)}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergeert. Volgens het majorantie kenmerk *convergeert de reeks $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(x^n)}{n^2+1}$ dus ook (voor elke $x \in \mathbb{R}$).*

c. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ en $n \geq 1$ is

$$\left|\frac{2+\sin(nx)}{n^2+1}\right| \leq \frac{3}{n^2}$$

terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergeert. Volgens het majorantie kenmerk *convergeert de reeks $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2+\sin(nx)}{n^2+1}$ dus ook (voor elke $x \in \mathbb{R}$).*

Opgave 1.6.11a

Zij s_k de k-de partiele som van de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, dat wil zeggen $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. We weten dat deze reeks convergeert. Noem de som s (in feite $s = \pi^2/6$, maar dat speelt in deze opgave geen rol.)

Met het majorantie-criterium volgt dat $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ook convergeert. Nu is

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2}\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2}\right) - \frac{2}{2^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}\right) \\
&= s_{2k} - \frac{1}{2}s_k.
\end{aligned}$$

Voor $k \to \infty$ heeft dit dus limiet $s - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}s$.

Opgave 1.6.12

a. De reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ convergeert als $a > 1$ en divergeert als $a \leq 1$.

   Bewijs: Als $a > 1$ nemen we $s = \frac{1+a}{2}$ en merken we op dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^a}}{n^{-s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{a-s}} = 0 \qquad \text{vanwege} \quad a - s > 0,$$

   terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ convergeert vanwege $s > 1$.

   Als $a \leq 1$ en $n \geq 3$ zijn, is $\frac{\ln n}{n^a} > \frac{1}{n^a} > 0$ terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-a}$ divergeert vanwege $a \leq 1$.

b. De reeks $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a \ln n}$ convergeert als $a > 1$ en divergeert als $a \leq 1$.

   Bewijs: Als $a > 1$ en $n \geq 3$ zijn, is $0 < \frac{1}{n^a \ln n} < \frac{1}{n^a}$ terwijl de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-a}$ convergeert (vanwege $a > 1$).

   Als $a < 1$ nemen we $s = \frac{1+a}{2}$ en merken we op dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-s}}{\frac{1}{n^a \ln n}} = \lim_{n\to\infty} n^{a-s} \ln n = 0 \qquad \text{vanwege} \quad a - s < 0.$$

   Wanneer de reeks $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a \ln n}$ zou convergeren, zou, volgens het limiet kenmerk, dus ook de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ convergeren. We weten echter dat de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ divergeert vanwege $s < 1$.

   Als $a = 1$ dan is de reeks $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ divergent (zie Opgave 1.6.13a).

Opgave 1.6.13

We gebruiken hier drie maal het integraal kenmerk.

a. Zij $f(x) := \frac{1}{x \ln x}$. De functie f is positief, continu en monotoon dalend op $[2, \infty[$. Een primitieve van f wordt gegeven door $F(x) = \ln(\ln x)$ (substitueer $x = e^y$ in $\int f(x)\,dx$). Dus is $\int_2^p f(x)\,dx = \ln(\ln p) - \ln(\ln 2)$. Hieraan zien we dat $\int_2^{n+1} f(x)\,dx$ niet convergeert als $n \to \infty$ en dus convergeert de gegeven reeks ook niet.

b. Zij $f(x) := \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$. De functie f is positief, continu en monotoon dalend op $[3, \infty[$. Een primitieve van f wordt gegeven door $F(x) = \ln(\ln(\ln x))$ (substitueer $x = e^y$ in $\int f(x)\,dx$ en gebruik (a)).

Hieraan zien we dat $\int_3^{n+1} f(x)\,dx$ niet convergeert als $n \to infty$ en dus convergeert de gegeven reeks ook niet.

c. Zij $f(x) := \frac{1}{x \ln x (\ln(\ln x))^2}$. De functie f is positief, continu en monotoon dalend op $[3, \infty[$. Een primitieve van f wordt gegeven door $F(x) = -\frac{1}{\ln(\ln x)}$. Hieraan zien we dat $\int_3^{n+1} f(x)\,dx$ convergeert (naar 0) als $n \to \infty$ en dus convergeert de gegeven reeks ook.

Opgave 1.6.14

Gevraagd is voor welke reële getallen x de reeks

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^x}{1 + n^{2x}}$$

convergeert. De gegeven aanwijzing volgend onderscheiden we de gevallen $x = 0, x < 0$ en $x > 0$.

Als $x = 0$ zijn alle termen van de reeks gelijk aan $\frac{1}{2}$. De termen gaan dus niet naar 0. *Conclusie: voor $x = 0$ divergeert de reeks.*

Bekijk nu het geval $x < 0$. Er geldt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^x}{1+n^{2x}}}{n^x} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + n^{2x}} = 1$$

Omdat deze limiet bestaat en $\neq 0$ is weten we volgens het limietcriterium dat de gegeven reeks convergeert precies dan als de vergelijkreeks $\sum_{n \geq 1} n^x$ convergeert, d.w.z precies dan als $x < -1$ is. *Conclusie: voor $x < -1$ convergeert de reeks; voor $-1 \leq x < 0$ divergeert de reeks.*

Bekijk nu het geval $x > 0$. Er geldt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^x}{1+n^{2x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{2x}}{1 + n^{2x}} = 1$$

Omdat deze limiet bestaat en $\neq 0$ is weten we volgens het limietcriterium dat de gegeven reeks convergeert precies dan als de vergelijkreeks $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ convergeert, d.w.z precies dan als $x > 1$ is. *Conclusie: voor $x > 1$ convergeert de reeks; voor $0 < x \leq 1$ divergeert de reeks.*

Eindconclusie: De reeks convergeert precies dan als $|x| > 1$ is.

Opgave 1.6.15

Te berekenen $\sum_{n\geq 1} a_n$ waarbij $a_n = \begin{cases} \frac{1}{4m-3} & \text{als } n = 3m-2 \\ \frac{1}{4m-1} & \text{als } n = 3m-1 \\ -\frac{1}{2m} & \text{als } n = 3m \end{cases}$

Berekening: We beschouwen eerst de $3k$-de partiële som van deze reeks. (Waarschuwing: Convergentie van deze $3k$-de partiële sommen zegt overigens nog niets over convergentie van de k-de partiële sommen; kijk maar naar de reeks

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$$

waarvan de $3k$-de partiële sommen ook convergeren, terwijl die reeks zelf niet convergeert.)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3k} a_n &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\
&= \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{4k-3} + \tfrac{1}{4k-1} - \tfrac{1}{2k}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \cdots + \tfrac{1}{4k-3} + \tfrac{1}{4k-1}\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \cdots + \tfrac{1}{4k-3} + \tfrac{1}{4k-2} + \tfrac{1}{4k-1} + \tfrac{1}{4k}\right) \\
&\quad - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{4k-2} + \tfrac{1}{4k}\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{4k-1} + \tfrac{1}{4k}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2k}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

Laten we s_k schrijven voor de k-de partiële som van de *harmonische* reeks, dus $s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$. Dan weten we dat

$$\lim_{k\to\infty} (s_k - \ln k) = \gamma,$$

de constante van Euler. Dit toepassend op de gevonden uitdrukking voor

$\sum_{n=1}^{3k} a_n$ vinden we dat

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3k} a_n &= s_{4k} - \tfrac{1}{2}s_{2k} - \tfrac{1}{2}s_k \\
&= (s_{4k} - \ln 4k) - \tfrac{1}{2}(s_{2k} - \ln 2k) - \tfrac{1}{2}(s_k - \ln k) \\
&\quad + \ln 4k - \tfrac{1}{2}\ln 2k - \tfrac{1}{2}\ln k \\
&= (s_{4k} - \ln 4k) - \tfrac{1}{2}(s_{2k} - \ln 2k) - \tfrac{1}{2}(s_k - \ln k) \\
&\quad + (\ln 4 + \ln k) - \tfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln k) - \tfrac{1}{2}\ln k \\
&= (s_{4k} - \ln 4k) - \tfrac{1}{2}(s_{2k} - \ln 2k) - \tfrac{1}{2}(s_k - \ln k) + \tfrac{3}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

Nemen we hier nu de limiet voor $k \to \infty$ dan vinden we

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{3k} a_n = \gamma - \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{3}{2}\ln 2 = \tfrac{3}{2}\ln 2.$$

Aangezien verder

$$\sum_{n=1}^{3k} a_n = \left(\sum_{n=1}^{3k-1} a_n\right) + a_{3k} = \left(\sum_{n=1}^{3k-2} a_n\right) + a_{3k-1} + a_{3k}$$

en de verschiltermen a_{3k} resp. $(a_{3k-1} + a_{3k})$ voor $k \to \infty$ naar 0 gaan, kunnen we ook afleiden dat

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{3k-1} a_n = \tfrac{3}{2}\ln 2 \qquad \text{en} \qquad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{3k-2} a_n = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Hieruit volgt dat de reeks convergeert, met waarde

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Conclusie: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ en $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ zijn twee convergente reeksen, die uit dezelfde termen bestaan (weliswaar in verschillende volgorde). Desalniettemin convergeren deze reeksen naar verschillende waarden, nl. $\frac{3}{2}\ln 2$ resp. $\ln 2$. We wijten dit aan het feit dat de reeksen niet absoluut convergent zijn (cf. Stelling 1.17).