Fouriertheorie, uitwerkingen paragraaf 2.7

opgaven 1,7,8 (door Jan Stienstra), 2, 3 (door Quintijn Puite), 4, 5, 6 (door Michiel Hochstenbach), 9 (door Yuri Kuznetsov)

Af en toe zijn in de uitwerkingen wat tussenstappen overgeslagen. Doe dit op het tentamen niet (het vergroot ook de kans op fouten), maar werk het netjes uit!

Opgave 2.7.1

(a) De Fourierreeks is $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ met $\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t dt = \frac{\pi}{4}$

en voor $n \neq 0$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi te^{-int}dt &= -\frac{1}{2\pi in}\left(\pi e^{-in\pi} - \int_0^\pi e^{-int}dt\right) \\ &= -\frac{(-1)^n}{2in} + \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2}.\end{aligned}$$

(b) De Fourierreeks is $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ met $\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^0 2dt + \int_0^\pi 3dt\right) = \frac{5}{2}$

en voor $n \neq 0$

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^0 2e^{-int}dt + \int_0^\pi 3e^{-int}dt\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi in}\left(2(1-e^{in\pi}) + 3(e^{-in\pi}-1)\right) \\ &= \frac{1-(-1)^n}{2\pi in} = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{1}{\pi in} & \text{als } n \text{ oneven}\end{cases}\end{aligned}$$

(c) De Fourierreeks is $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ met

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-int}\sin t dt = \frac{1}{4\pi i}\int_0^\pi (e^{it-int} - e^{-it-int})dt.$$

Voor $n \neq \pm 1$ is dit

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{e^{\pi i(1-n)} - 1}{i - in} - \frac{e^{\pi i(-1-n)} - 1}{-i - in}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{(-1)^{1-n}-1}{i(1-n)} - \frac{(-1)^{-1-n}-1}{-i(1+n)}\right)\\
&= \frac{1+(-1)^n}{2\pi(1-n^2)}
\end{aligned}
$$

Verder is

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_1 &= \frac{1}{4\pi i}\int_0^\pi (1-e^{-2it})dt = \frac{1}{4i}\\
\widehat{f}_{-1} &= \frac{1}{4\pi i}\int_0^\pi (e^{2it}-1)dt = -\frac{1}{4i}
\end{aligned}
$$

Opgave 2.7.2

(a) I.h.a. is voor een T-periodieke functie f de Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\omega x}$ waarbij $\widehat{f}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$.

In dit geval ($T=2$ dus $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$) is

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sin(t)\; e^{-in\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} e^{-in\pi t}\,dt\\
&= \frac{1}{4i}\int_{-1}^1 \left(e^{it-in\pi t} - e^{-it-in\pi t}\right)\,dt\\
&= \frac{1}{4i}\left[\frac{e^{it-in\pi t}}{i-in\pi} - \frac{e^{-it-in\pi t}}{-i-in\pi}\right]_{t=-1}^1\\
&= \frac{1}{4i}\left(\frac{e^{i-in\pi}-e^{-i+in\pi}}{i-in\pi} - \frac{e^{-i-in\pi}-e^{i+in\pi}}{-i-in\pi}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{4i}\left(\frac{e^i-e^{-i}}{i-in\pi} - \frac{e^{-i}-e^i}{-i-in\pi}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{2}\frac{e^i-e^{-i}}{2i}\left(\frac{1}{i-in\pi} - \frac{1}{i+in\pi}\right)\\
&= (-1)^n\sin(1)\frac{in\pi}{(n\pi)^2-1}
\end{aligned}
$$

en de gevraagde Fourierreeks is dus $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n i\sin(1)\frac{n\pi}{(n\pi)^2-1}e^{in\pi x}$. Merk op dat de noemers $\pm i - in\pi$ van de primitieve ongelijk nul zijn voor elke n. (Hiermee is de opgave beantwoord.)

(Merk op dat we integreren over $[-1,1]$. Als we zouden integreren over $[0,2]$ moeten we er rekening mee houden dat f op $[1,2]$ niet gegeven wordt door $\sin$.)

Om i.h.a. de *hoofdwaarde* van een tweezijdige reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ te bepalen, schikken we hem om tot de reeks $a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_{-n} + a_n)$. Voor een Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\omega x}$ komt dit neer op

$$\begin{aligned}
&\widehat{f}_0 e^{i0\omega x} + \sum_{n\geq 1}\left(\widehat{f}_{-n}e^{-in\omega x} + \widehat{f}_n e^{in\omega x}\right) = \\
= \;& \widehat{f}_0 + \sum_{n\geq 1}\left(\widehat{f}_{-n}(\cos(n\omega x) - i\sin(n\omega x) + \widehat{f}_n(\cos(n\omega x) + i\sin(n\omega x)\right) \\
= \;& \widehat{f}_0 + \sum_{n\geq 1}(\widehat{f}_n + \widehat{f}_{-n})\cos(n\omega x) + i(\widehat{f}_n - \widehat{f}_{-n})\sin(n\omega x).
\end{aligned}$$

De hoofdwaarde van onze Fourierreeks is dus

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(1)\frac{2n\pi}{(n\pi)^2-1}\sin(n\pi x) = f(x)$$

waarbij we opmerken dat de laatste gelijkheid geldt op grond van de Fourier inversie formule (20) (die we mogen toepassen daar f stuksgewijs continu differentieerbaar is) en wegens het feit dat f voldoet aan $f(x) = \frac{\lim_{y\downarrow x} f(y) + \lim_{y\uparrow x} f(y)}{2}$.

(b) In dit geval ($T = 2$ dus $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$) is $\widehat{f}_0 = \frac{1}{2}$ en voor $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-in\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-in\pi t}\,dt = \left[\frac{e^{-in\pi t}}{-2in\pi}\right]_0^1 = \frac{e^{-in\pi}-1}{-2in\pi} \\
&= \frac{1-(-1)^n}{2n\pi i} = \begin{cases} 0 & \text{voor even } \; n \neq 0 \\ \frac{1}{n\pi i} & \text{voor oneven } \; n \end{cases}
\end{aligned}$$

en de gevraagde Fourierreeks is dus $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\pi x}$ met de $\widehat{f}_n$ zoals zojuist berekend. (Hiermee is de opgave beantwoord.)

Om i.h.a. de hoofdwaarde van een Fourierreeks $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\omega x}$ te bepalen, schikken we hem weer om tot de reeks

$$\widehat{f}_0 + \sum_{n\geq 1}(\widehat{f}_n + \widehat{f}_{-n})\cos(n\omega x) + i(\widehat{f}_n - \widehat{f}_{-n})\sin(n\omega x).$$

De hoofdwaarde van onze Fourierreeks is dus

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} i\frac{1-(-1)^n}{n\pi i}\sin(n\pi x) = \frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)\pi x) = f(x)$$

waarbij we opmerken dat de laatste gelijkheid geldt op grond van de Fourier inversie formule (20) (die we mogen toepassen daar f stuksgewijs continu differentieerbaar is) en wegens het feit dat f voldoet aan $f(x) = \frac{\lim_{y\downarrow x} f(y)+\lim_{y\uparrow x} f(y)}{2}$.

Opgave 2.7.3

(a) Volgens formules (29) - (31) is

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-0^2} = \frac{2}{\pi}$$

en voor $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos nt\,dt \\ &= \text{(zie opgave 2.7.1c)}\begin{cases} 0 & \text{voor oneven } \; n \geq 1 \\ \frac{4/\pi}{1-n^2} & \text{voor even } \; n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

De cosinusreeks wordt derhalve gegeven door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

Bovendien geldt de eerste gelijkheid op grond van de Fourier inversie formule (20) (die we mogen toepassen daar f stuksgewijs continu differentieerbaar is) en wegens het feit dat f voldoet aan $f(x) = \frac{\lim_{y\downarrow x} f(y)+\lim_{y\uparrow x} f(y)}{2}$ (in feite is f zelfs continu).

Daarmee hebben we f uitgedrukt in een cosinusreeks.

Opmerking: f is de 2π-periodieke *even* voortzetting van sin op $[0,\pi]$; voor $t \in [0,\pi]$ is dus $f(t) = \sin t$ en voor $t \in [-\pi, 0]$ is $f(t) = \sin(-t) = -\sin t$. Omdat $\sin t \geq 0$ is voor $t \in [0,\pi]$ en $\sin t \leq 0$ is voor $t \in [-\pi, 0]$ zien we dat de functie f ook kan worden beschreven als $f(t) = |\sin t|$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Omdat

$$\sin t + |\sin t| = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad -\pi \le t \le 0 \\ 2\sin t & \text{voor} \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

is er een heel nauw verband tussen deze opgave 2.7.3a en opgave 2.7.1c

(b)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{\pi}{2}$$

en voor $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{n}\,dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{voor even} \quad n \ge 2 \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{voor oneven} \quad n \end{cases} \end{aligned}$$

De cosinusreeks wordt derhalve gegeven door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Bovendien geldt de eerste gelijkheid op grond van de Fourier inversie formule (20) (die we mogen toepassen daar f stuksgewijs continu differentieerbaar is) en wegens het feit dat f voldoet aan $f(x) = \frac{\lim_{y\downarrow x} f(y) + \lim_{y\uparrow x} f(y)}{2}$) (in feite is f zelfs continu). Daarmee hebben we f uitgedrukt in een cosinusreeks.

Opmerking: f is de 2π-periodieke *even* voortzetting van $t \mapsto t$ op $[0,\pi]$, dus de 2π-periodieke voortzetting van $t \mapsto |t|$ op $[-\pi,\pi]$. Vergelijk daarom deze opgave met voorbeeld 4 op blz. 59

(c) Let op: f is de 2π-periodieke *even* voortzetting van $t \mapsto \pi - t$ op $[0,\pi]$, dus de 2π-periodieke voortzetting van $t \mapsto \pi - |t|$ op $[-\pi,\pi]$. Kortom $f = \pi - f_b$ waarbij f_b de functie is uit opgave 2.7.3b. Hieruit volgt direct dat

$$f(x) = \pi - f_b(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 2.7.4

Zij $a \neq 0$. Voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)t}\,dt = \tfrac{1}{2\pi(a-in)}(e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}) \\
&= \tfrac{(-1)^n}{2\pi(a-in)}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \tfrac{(-1)^n}{\pi(a-in)}\sinh(a\pi).
\end{aligned}$$

We passen nu Parseval (Stelling 2.20) toe (merk op dat aan de voorwaarden van deze stelling is voldaan):

- Enerzijds is $|\widehat{f}_n|^2 = \widehat{f}_n\overline{\widehat{f}_n} = \frac{\sinh^2(a\pi)}{\pi^2(a^2+n^2)}$.
- Anderzijds is $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2at}\,dt = \frac{1}{4a\pi}(e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}) = \frac{\sinh(2a\pi)}{2a\pi}$.

Met Parseval volgt: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi\sinh(2a\pi)}{2a\sinh^2(a\pi)} = \frac{\pi\cosh(a\pi)}{a\sinh(a\pi)}$. Dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\cosh(a\pi)}{a\sinh(a\pi)} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Alternatief: substitueer $x = \pi$ in de Fourier reeks en bedenk dat $e^{i\pi n} = (-1)^n$. Met de Fourier inversie formule (20) krijgen we

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{a-in} = \frac{\pi\cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)}.$$

Neem nu in de reeks steeds de n-e en $(-n)$-e term samen en gebruik $\frac{1}{a-in} + \frac{1}{a+in} = \frac{2a}{a^2+n^2}$. Hieruit volgt het gevraagde.

Opgave 2.7.5

(a)+(b) Zelf doen.

(c) Na drie maal partieel integreren vinden we voor $n \neq 0$ de Fouriercoefficient

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^3 - \pi^2 t)e^{-int}\,dt = -6i\frac{(-1)^n}{n^3}$$

Voor $n = 0$: $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^3 - \pi^2 t)\,dt = 0$ (want de integrand is een oneven functie). Omdat F continu en stuksgewijs continu differentieerbaar is, geldt volgens Stelling 2.16 dat $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty *} c_n e^{inx}$ voor alle x. In feite convergeert de reeks voor alle x (zelfs absoluut) (omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergeert), dus geldt ook $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ voor alle x.

(d) Uit (c) zien we: $c_{-n} = -c_n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Dus voor alle x geldt

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (c_{-n}e^{-inx} + c_n e^{inx}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 2ic_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx. \end{aligned}$$

De laatste reeks convergeert voor alle x omdat voor alle $n \geq 1$ en $x \in \mathbb{R}$ geldt $|\frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx| \leq \frac{1}{n^3}$, en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergeert.

(e) Dit kan men bewijzen door Stelling 2.5 toe te paseen. De reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} n\frac{c_n}{in}$ convergeert absoluut, dus volgens Stelling 2.5 convergeert de reeks $\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{c_n e^{inx}}{in}$ voor elke x, en is deze differentieerbaar, met afgeleide $\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} c_n e^{inx} = F(x)$. Ook:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{c_n e^{inx}}{in} &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{c_n}{in} \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \frac{\cos nx}{n} \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \frac{\cos nx - 1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^x \sin nt\, dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \end{aligned}$$

(Ga na dat de eerste stap van de tweede regel mag omdat alle reeksen convergeren). Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ een constante is, is ook $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^x \sin nt\, dt$ een primitieve van F. Een andere primitieve van F is $\int_0^x F(t)\, dt$, en vullen we $x = 0$ in, dan zien we dat beide primitieven dan dezelfde waarde ($= 0$) hebben en dus dezelfde functie zijn. In het bijzonder, als we nu $x = \pi$ substitueren: $\int_0^\pi F(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^\pi \sin nt\, dt$.

(f) Als we de integralen uit (e) uitrekenen dan vinden we links

$$\int_0^\pi (t^3 - \pi^2 t)\, dt = -\frac{\pi^4}{4}$$

en rechts

$$\begin{aligned} 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} (-\cos nx + \cos 0) &= 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} (1 - (-1)^n) \\ &= -24 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \end{aligned}$$

Conclusie: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Opgave 2.7.6

(a)+(b) Zelf doen.

(c) Voor $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2-\pi^2)e^{-int}\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi in}\left([(t^2-\pi^2)e^{-int}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2te^{-int}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi n^2}[te^{-int}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,dt \\ &= 2\frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

En voor $n=0$: $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2-\pi^2)\,dt = -\frac{2}{3}\pi^2$. Omdat F continu en stuksgewijs continu differentieerbaar is, geldt volgens Stelling 2.16 dat $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty *} c_n e^{inx}$. In feite convergeert de reeks (zelfs absoluut) voor elke x, dus geldt ook $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ voor alle x.

(d) Uit (c) weten we dat voor $-\pi < x \leq \pi$ geldt: $x^2 - \pi^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty *} c_n e^{inx}$. Met $x = 0$ wordt dit

$$\begin{aligned} -\pi^2 &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n = \lim_{N\to\infty}\left(2\sum_{n=-N}^{-1}\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{3}\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Opgave 2.7.7

(a) Zelf doen.

(b) De functie F is continu omdat het de samenstelling is van de bekende continue functies sinus en absolute waarde.
Alternatief: op elk open interval $(k\pi, (k+1)\pi)$ (met $k \in \mathbb{Z}$) is $F(x) =$

$(-1)^k \sin x$ en dus is F daar continu. Verder is voor elke $k \in \mathbb{Z}$ de functie F ook continu in het punt $k\pi$ omdat

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow k\pi} F(x) &= \lim_{x \uparrow k\pi} (-1)^{k-1} \sin x = 0 = |\sin x|\,,\\ \lim_{x \downarrow k\pi} F(x) &= \lim_{x \downarrow k\pi} (-1)^{k} \sin x = 0 = |\sin x|\,.\end{aligned}$$

Op elk open interval $(k\pi, (k+1)\pi)$ (met $k \in \mathbb{Z}$) is $F(x) = (-1)^k \sin x$ en dus is F daar continu differentieerbaar. Verder bestaan

$$\begin{aligned}\lim_{x \downarrow k\pi} F'(x) &= \lim_{x \downarrow k\pi} (-1)^k \cos x = (-1)^k(-1)^k = 1\,,\\ \lim_{x \uparrow (k+1)\pi} F'(x) &= \lim_{x \downarrow (k+1)\pi} (-1)^k \cos x = (-1)^k(-1)^{k+1} = -1\,.\end{aligned}$$

Dit bewijst dat F stuksgewijs continu differentieerbaar is.

F is een even functie, want $F(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = F(x)$.

(c) Omdat F een even functie is, bevat z'n reële Fourierreeks inderdaad alleen maar cosinus-termen. De bijbehorende Fouriercoëfficiënten zijn

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}$$

en voor $n > 1$ [1]

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\, dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))\, dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos((n+1)\pi)+1}{n+1} - \frac{-\cos((n-1)\pi)+1}{n-1}\right)\\ &= \frac{-2((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \text{ oneven} \\ \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{als} \quad n \text{ even}\end{cases}\end{aligned}$$

[1] Hier wordt gebruikt $\sin(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))$; immers $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} = \dfrac{e^{i(n+1)x}-e^{-i(n+1)x}}{4i} - \dfrac{e^{i(n-1)x}+e^{-i(n-1)x}}{4i}$

Voor $n = 1$ vinden we

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Conclusie:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{\pi(k^2 - \frac{1}{4})}$$

Opgave 2.7.8

(a)

differentiaalvergelijking:	$y'' - y' - 2y = 0$
karakteristiek polynoom:	$X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$
karakteristiek wortels:	$-1,\ \ 2$
algemene oplossing DV:	$y(t) = ae^{-t} + be^{2t}$
beginvoorwaarden:	$y(0) = 1, y'(0) = 3$
	$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a + b & = & 1 \\ -a + 2b & = & 3 \end{array}$
opl. beginvw.probl.:	$y(t) = \frac{1}{3}(-e^{-t} + 4e^{2t})$

(b)

differentiaalvergelijking:	$y'' - 4y' + 4y = 0$
karakteristiek polynoom:	$X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$
karakteristiek wortels:	$2,\ \ 2$
algemene oplossing DV:	$y(t) = (a + bt)e^{2t}$
beginvoorwaarden:	$y(0) = 1, y'(0) = 3$
	$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ 2a + b & = & 3 \end{array}$
opl. beginvw.probl.:	$y(t) = (1 + t)e^{2t}$

(c)

differentiaalvergelijking:	$y'' - 2y' + 5y = 0$
karakteristiek polynoom:	$X^2 - 2X + 5$
karakteristiek wortels:	$\frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$
algemene oplossing DV:	$y(t) = ae^{(1+2i)t} + be^{(1-2i)t}$
beginvoorwaarden:	$y(0) = 1, y'(0) = 3$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ (1+2i)a + (1-2i)b & = & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a-b & = & -i \end{array}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1-i}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}$$

opl. beginvw.probl.: $y(t) = \sqrt{2}e^t \cos(2t - \dfrac{\pi}{4})$

(d)

homogeen differentiaalvergelijking:	$y'' - 2y' + 5y = 0$
karakteristiek polynoom:	$X^2 - 2X + 5$
karakteristiek wortels:	$\frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$
algemene oplossing HDV:	$y(t) = ae^{(1+2i)t} + be^{(1-2i)t}$
speciale oplossing DV:	$y(t) = 1$
algemene oplossing DV:	$y(t) = 1 + ae^{(1+2i)t} + be^{(1-2i)t}$
beginvoorwaarden:	$y(0) = 1, y'(0) = 3$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} 1+a+b & = & 1 \\ (1+2i)a + (1-2i)b & = & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & -\frac{3}{2i} \end{array}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-i}{2}, \quad b = -a = \frac{3i}{4}$$

opl. beginw. probl.: $y(t) = 1 + \frac{3}{2}e^t \sin 2t$

Opgave 2.7.9

- De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking:

differentiaalvergelijking:	$y'' + 3y' + 2y = 0$
karakteristiek polynoom:	$X^2 + 3X + 2$
karakteristieke wortels:	$-1, \ \ -2$
algemene oplossing:	$y(t) = ae^{-t} + be^{-2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

- De Fourierreeks van $u(t) = \cos t + \sin 2t$ heeft slechts vier termen:

$$u(t) = -\frac{1}{2i}e^{-2it} + \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2i}e^{2it}$$

zodat

$$\hat{u}_{-2} = -\frac{1}{2i}, \quad \hat{u}_{-1} = \hat{u}_1 = \frac{1}{2}, \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{2i}$$

en $\hat{u}_n = 0$ voor $n \notin \{-2, -1, 1, 2\}$.

De formule (46) met $\omega = 1, a_1 = 3, a_0 = 2$ geeft

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{-2} &= -\frac{1}{2i(-2^2 - 6i + 2)} = \frac{1}{4i(1 + 3i)} = -\frac{3 + i}{40}, \\
\hat{v}_{-1} &= \frac{1}{2(-1^2 - 3i + 2)} = \frac{1}{2(1 - 3i)} = \frac{1 + 3i}{20}, \\
\hat{v}_1 &= \frac{1}{2(-1^2 + 3i + 2)} = \frac{1}{2(1 + 3i)} = \frac{1 - 3i}{20}, \\
\hat{v}_2 &= +\frac{1}{2i(-2^2 + 6i + 2)} = -\frac{1}{4i(1 - 3i)} = -\frac{3 - i}{40}
\end{aligned}$$

en $\hat{v}_n = 0$ voor $n \notin \{-2, -1, 1, 2\}$. Dus is de speciale oplossing van de inhomogene defferentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}
v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_n e^{int} = \hat{v}_{-2}e^{-2it} + \hat{v}_{-1}e^{-it} + \hat{v}_1 e^{it} + \hat{v}_2 e^{2it} \\
&= -\frac{3 + i}{40}e^{-2it} + \frac{1 + 3i}{20}e^{-it} + \frac{1 - 3i}{20}e^{it} - \frac{3 - i}{40}e^{2it} \\
&= \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t - \frac{3}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t.
\end{aligned}$$

Alternatief: Zoek $v(t)$ als een lineaire combinatie van $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t$, d.w.z.

$$v(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + a_3 \cos 2t + a_4 \sin 2t, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Zet deze formule in de inhomogene differentiaalvergelijking en vergelijk de coëfficiënten voor $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t$. Dit geeft een stelsel lineaire vefgelijkingen voor a_1, a_2, a_3, a_4 waaruit blijkt dat

$$a_1 = \frac{1}{10}, \; a_2 = \frac{3}{10}, \; a_3 = -\frac{3}{20}, \quad a_4 = -\frac{1}{20}.$$

- De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking is dan

$$y(t) = ae^{-t} + be^{-2t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t - \frac{3}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t$$

met $a, b \in \mathbb{R}$.