Fouriertheorie, uitwerkingen paragraaf 3.3

opgaven 1,2,3 (door Franziska Bittner), 5,6 (door Michiel Hochstenbach), 7 (door Jan Stienstra) en 8,9 (door Yuri Kuznetsov)

Opgave 3.3.1

Zij $q > 0$.

$$\int_0^q f(t)dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^q = \frac{1}{s}(1 - e^{-sq}).$$

Dus $\lim\limits_{q\uparrow\infty} \int_0^q f(t)dt$ bestaat en is gelijk aan $\frac{1}{s}$.

Opgave 3.3.2

Zij $n \geq 0$ een geheel getal. Zij $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n e^{-st}$.
Inductie naar n.
$n = 0$: Zie opgave 3.3.1.
Inductiestap: Laat $n > 0$ en $q > 0$ zijn.

$$\int_0^q f_n(t)dt = \left[-t^n \frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^q + \frac{n}{s}\int_0^q e^{-st} t^{n-1} dt$$

(partiële integratie). Omdat $\left[-t^n \frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^q = -\frac{1}{s} q^n e^{-sq} \to 0$ voor $q \to \infty$, $\lim\limits_{q\uparrow\infty} \int_0^q e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{(n-1)!}{s^n}$ volgens inductiehypothese.

Opgave 3.3.3

(a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx$ bestaat, want $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim\limits_{p\downarrow 0} [2x^{\frac{1}{2}}]_p^1 = 2$ bestaat. (Pas de majorantie stelling en de daarop volgende opmerking toe op $(0, 1]$ met $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}$ – dan bestaat $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.)

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ bestaat, want $\left|\frac{1}{1+x}\right| \leq 1$ voor $0 \leq x \leq 1$ en $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx$ bestaat.

(c) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ bestaat, want $|x + 1| \leq 2$ voor $0 \leq x \leq 1$ en $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx$ bestaat.

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx$ bestaat:

$\int_{-\infty}^{-1} (\frac{\sin x}{x})^2 dx = \int_1^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^2 dx$ bestaat, omdat $(\sin x)^2 \leq 1$ en $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ bestaat. $\int_{-1}^0 (\frac{\sin x}{x})^2 = \int_0^1 (\frac{\sin x}{x})^2$ bestaat, omdat $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(e) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx$ bestaat:

$\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx$ bestaat, omdat $\frac{e^{-x}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$ continu, dus begrensd op $[1,2]$ en $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ bestaat. En $\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}dx$ convergeert, omdat $\left|\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right| \leq 1$ voor $x \geq 2$ en $\int_2^\infty e^{-x}dx$ bestaat.

(f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$ divergeert:

Bekijk $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$. Deze divergeert, want voor $0 < p < 1$ is $\int_p^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx = [\ln(e^x-1)]_p^1 = \ln(e-1) - \ln(e^p-1) \to \infty$ voor $p \downarrow 0$.

Echter, als $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$ zou convergeren, zou ook $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$ convergeren, omdat $e^x \leq e$ voor $0 \leq x \leq 1$.

Of vergelijk met $\frac{1}{x}$ en merk op dat $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Opgave 3.3.5

(a) Splits de integraal in $\int_0^1$ en $\int_1^\infty$. $\int_0^1 (x^2+1)^{-n}\,dx$ is geen oneigelijke integraal. Ook $\int_1^\infty (x^2+1)^{-n}\,dx$ convergeert, want voor $n \geq 1$ en $x \geq 1$ geldt $\left|(x^2+1)^{-n}\right| \leq x^{-2n}$ en $\int_1^\infty x^{-2n}\,dx$ convergeert (Lemma 3.2). Dus $\int_0^\infty (x^2+1)^{-n}\,dx$ convergeert (volgens Definitie 3.1).

Definieer $I_n := \int_0^\infty (x^2+1)^{-n}\,dx$, met partiële integratie zien we voor $n \geq 1$ en $p > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^p (x^2+1)^{-n}\,dx &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^p + 2n\int_0^p \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{p}{(p^2+1)^n} + 2n\int_0^p \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx
\end{aligned}$$

Dus

$$\int_0^p (x^2+1)^{-(n+1)}\,dx = \frac{p}{2n(p^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int_0^p (x^2+1)^{-n}\,dx.$$

Als nu $p \to \infty$, dan gaat de 1^e term rechts naar 0, en de tweede is ook netjes eindig, dus $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n$. Omdat $I_1 = \int_0^\infty (x^2+1)^{-1}\,dx = [\arctan x]_0^\infty = \pi/2$, hebben we $I_2 = I_1/2 = \pi/4$. (Algemeen: $I_n = \frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}$).

(b) $\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$ convergeert, want $\lim_{x\downarrow 0}(\ln x)^n/\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (want $\lim_{x\downarrow 0} x^\epsilon \ln x = 0$ voor $\epsilon > 0$) en $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ convergeert.

Definieer $J_n := \int_0^1 (\ln x)^n\,dx$, met partiële integratie zien we voor $n \geq 1$, $q > 0$:

$$\int_q^1 (\ln x)^n\,dx = [x(\ln x)^n]_q^1 - n\int_q^1 x\frac{(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx$$

Als $q \downarrow 0$, dan volgt $J_n = -nJ_{n-1}$, omdat $\lim_{q\downarrow 0} q \ln q = 0$ en de rest eindig is (bestaat). Omdat $J_0 = 1$, hebben we $J_2 = -2J_1 = 2J_0 = 2$. (Algemeen: $J_n = (-1)^n n!$).

(Alternatief voor beide onderdelen: substitueer $y = -\ln x$ en herken de Gamma-functie).

Opgave 3.3.6

(a) Splits de integraal in $\int_0^1$ en $\int_1^\infty$. $\int_0^1 e^{-x^3}\,dx$ is geen oneigenlijke integraal. Ook $\int_1^\infty e^{-x^3}\,dx$ convergeert, want voor $x \geq 1$ geldt $-x^3 \leq -x$, dus $\left|e^{-x^3}\right| \leq e^{-x}$, en $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ convergeert. Dus $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$ convergeert.

(b) Deze integraal divergeert, bekijk namelijk $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^3}\,dx$. Voor $x \leq -1$ geldt $-x^3 \geq -x$, dus $e^{-x^3} \geq |e^{-x}| = e^{-x}$, en $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x}\,dx$ divergeert, dus $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^3}\,dx$ ook.

Opgave 3.3.7

Laat $0 < p < 1 < q$. Als je in $\int_p^q \sin(x^2)dx$ substitueert $x = \sqrt{y}$ dan vind je

$$\int_p^q \sin(x^2)dx = \int_{p^2}^{q^2} \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}dy = \int_{p^2}^{1} \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}dy + \int_{1}^{q^2} \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}dy$$

Omdat $\left|\frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{y}}$ is en omdat $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ convergeert, convergeert de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}dy$ ook.

Voor het andere stuk integraal moeten we eerst nog eens partieel integreren:

$$\int_1^{q^2} \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}dy = \frac{\cos(1)}{2} - \frac{\cos(q^2)}{2q} - \frac{1}{4}\int_1^{q^2} \frac{\cos(y)}{y\sqrt{y}}dy$$

Omdat $\left|\frac{\cos(y)}{y\sqrt{y}}\right| \leq \frac{1}{y\sqrt{y}}$ is en omdat $\int_1^\infty \frac{1}{y\sqrt{y}}dy$ convergeert, convergeert de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(y)}{y\sqrt{y}}dy$ ook. Bovendien is $\displaystyle\lim_{q\to\infty} \frac{\cos(q^2)}{2q} = 0$.

We zien dat $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}}dy$ convergeert.

Alles bij elkaar hebben we nu bewezen dat $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ convergeert.

Men kan opmerken dat $\int_{-q}^{-p} \sin(x^2)dx = \int_p^q \sin(x^2)dx$, waarna het voorgaande verhaal ook meteen de convergentie van $\int_{-\infty}^0 \sin(x^2)dx$ bewijst.

Tot slot kunnen we concluderen dat $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)dx$ *convergeert.*

Door in het voorgaande sin en cos om te wisselen (en hier en daar een + in − te veranderen) kan men ook laten zien dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx$ *convergeert.*
Voor beide integralen kan de waarde effectief worden berekend:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

Opgave 3.3.8

De integralen $\int_0^\infty e^{-st}\sin(ct)dt$ en $\int_0^\infty e^{-st}\cos(ct)dt$ convergeren want $|e^{-st}\sin(ct)| \leq e^{-st}$ en $|e^{-st}\cos(ct)| \leq e^{-st}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ en $\int_0^\infty e^{-st}dt$ bestaat voor $s > 0$ (zie opgave 3.3.1).
Als $c = 0$ dan

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(0t)dt = 0, \quad \int_0^\infty e^{-st}\cos(0t)dt = \frac{1}{s},$$

in overeenkomst met de gegeven formules.
Als $c \neq 0$, dan geeft de partiële integratie

$$\begin{aligned} \int_0^q e^{-st}\sin(ct)dt &= \frac{1}{c} - \frac{e^{-cq}\cos(cq)}{c} - \frac{s}{c}\int_0^q e^{-st}\cos(ct)dt \qquad (1) \\ &= \frac{1}{c} - \frac{e^{-cq}\cos(cq)}{c} - \frac{se^{-sq}\sin(cq)}{c^2} - \frac{s^2}{c^2}\int_0^q e^{-st}\sin(ct)dt. \end{aligned}$$

Hieruit voldt (voor $s > 0$ als $q \to \infty$) dat

$$\left(1 + \frac{s^2}{c^2}\right)\int_0^\infty e^{-st}\sin(ct)dt = \frac{1}{c}$$

en dus

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(ct)dt = \frac{c}{s^2+c^2}\ .$$

Verder impliceert (1) dat

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(ct)dt = \frac{1}{c} - \frac{s}{c}\int_0^\infty e^{-st}\cos(ct)dt\ ,$$

zo dat

$$\int_0^\infty e^{-st}\cos(ct)dt = \frac{c}{s}\left(\frac{1}{c} - \int_0^\infty e^{-st}\sin(ct)dt\right) = \frac{c}{s}\left(\frac{1}{c} - \frac{c}{s^2+c^2}\right) = \frac{s}{s^2+c^2}\ .$$

Opgave 3.3.9

(a) Substitutie $x = t^2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{-1} t dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

(b) Substitutie $x = t^3$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\int_0^\infty e^{-t^3} t^{-2} t^2 dt = 3\int_0^\infty e^{-t^3} dt.$$