Fouriertheorie, uitwerking van de opgaven uit paragraaf 6.8:

1(ab), 4(e) (door Jan Stienstra)
3(ab), 4(abcd) (door Michiel Hochstenbach)
2,6,7,8,9,10,11,12 (door Yuri Kuznetsov)

Opgave 6.8.1

(a) Merk eerst op dat $H(x+a) - H(x) = 0$ als $x < -a$ of $x \geq 0$, terwijl $H(x+a) - H(x) = 1$ als $-a \leq x < 0$. Dus is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{H(x+a) - H(x)}{a} dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^{0} f(x) dx = \frac{F(0) - F(-a)}{a}$$

(b) $\lim_{a \downarrow 0} \frac{F(0) - F(-a)}{a} \overset{(h=-a)}{=} \lim_{h \uparrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} \overset{*}{=} F'(0) = f(0)$

waarbij $\overset{*}{=}$ in feite gewoon de definitie van 'afgeleide' is.

Opgave 6.8.2

(a) Voor iedere functie $f \in \mathcal{C}$ hebben we $f(R) = 0$ als $|R|$ groot genoeg is. Dus geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1(f) &= \mathcal{A}'(f) = -\mathcal{A}(f') = -\int_{-\infty}^{\infty} |x| f'(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x f'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} x f'(x)\, dx \\
&= \lim_{R \to -\infty} [x f(x)]_R^0 - \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx - \lim_{R \to \infty} [x f(x)]_0^R + \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}''(f) &= \mathcal{D}_1'(f) = -\mathcal{D}_1(f') = \int_{-\infty}^{0} f'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} f'(x)\, dx \\
&= \lim_{R \to -\infty} [f(x)]_R^0 - \lim_{R \to \infty} [f(x)]_0^R \\
&= f(0) - (-f(0)) = 2f(0) = 2\mathcal{D}_\delta(f)
\end{aligned}$$

ofwel

$$\mathcal{A}'' = 2\mathcal{D}_\delta. \tag{1}$$

(b) Als we de functie $x \mapsto |x|$ met de distributie $\mathcal{A}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx$ identificeren, dan kunnen we schrijven $\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x)$, maar dat hetzelfde betekent als (1): *"Voor iedere $f \in \mathcal{C}$ geldt dat $\mathcal{A}''(f) = 2f(0)$"*.

Opgave 6.8.3

(a) Zij $G = F'$, dan geldt dus $G'(x) = f(x)$ voor alle x. Uit de definitie van φ_a volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\, dx = \frac{1}{a^2}\left(\int_{-a}^{0} (x+a) f(x)\, dx - \int_0^a (x-a) f(x)\, dx\right).$$

Met partiële integratie zien we dat dit gelijk is aan

$$\frac{1}{a^2}\left([(x+a)G(x)]_{-a}^{0} - [(x-a)G(x)]_0^a - \int_{-a}^{0} G(x)\, dx + \int_0^a G(x)\, dx\right)$$
$$= \frac{1}{a^2}(F(a) - 2F(0) + F(-a)).$$

(b) Omdat F drie maal continu differentieerbaar is, krijgen we met Taylor $F(\pm a) = F(0) \pm aF'(0) + \frac{a^2}{2}F''(0) + \mathcal{O}(a^3)$, dus

$$F(a) - 2F(0) + F(-a) = a^2 F''(0) + \mathcal{O}(a^3)$$

en $\lim\limits_{a \downarrow 0} \dfrac{1}{a^2}(F(a) - 2F(0) + F(-a)) = F''(0) = f(0)$.

(Alternatief: 2 maal l'Hopital).

Opgave 6.2.4

(a)
- Zij $x \neq 0$ vast, dan geldt voor alle $0 < a < |x|$ dat $\varphi_a(x) = 0$ en dus is, nog steeds met x vast, $\lim_{a \downarrow 0} \varphi_a(x) = 0$.
- Voor het tweede onderdeel nemen we $f(x) = 1, F(x) = x$ in opgave 6.8.1(a), dit geeft het gevraagde.
- Tenslotte geldt met $f(x) = e^{-isx}$ volgens opgave 6.8.1(b): $\lim_{a \downarrow 0} \widehat{\varphi_a}(s) = \lim_{a \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\varphi_a(x)\, dx = f(0) = 1$.

(b)

- Zij $x \neq 0$ vast, dan geldt voor alle $0 < a < |x|$ dat $\varphi_a(x) = 0$.
- Voor het tweede onderdeel nemen we $f(x) = 1, F(x) = \frac{x^2}{2}$ in opgave 6.8.3(a), dit geeft het gevraagde.
- Tenslotte geldt met $f(x) = e^{-isx}$ volgens opgave 6.8.3(b): $\lim_{a\downarrow 0} \widehat{\varphi_a}(s) = \lim_{a\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\varphi_a(x)\,dx = f(0) = 1$.

(c)

- Zij $x \neq 0$ vast. Als $a \downarrow 0$, dan $-x^2/a \to -\infty$. Die e-macht "gaat harder naar nul dan elke macht van $\frac{1}{a}$ naar ∞", dus $\lim_{a\downarrow 0} \varphi_a(x) = 0$.
- Verder volgt met de substitutie $y = x/\sqrt{a}$ dat

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1.$$

- Tenslotte krijgen we met de substitutie $y = (\sqrt{2/a})x$:

$$\widehat{\varphi_a}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} e^{-x^2/a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\sqrt{a/2})y} e^{-y^2/2}\,dy.$$

Dit herkennen we als de Fourier getransformeerde van $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$ in het punt $s\sqrt{a/2}$. Volgens het voorbeeld op blz. 118 is dit gelijk aan $e^{-as^2/4}$, en met $a \downarrow 0$ volgt de gevraagde limiet.

(d)

- Zij $x \neq 0$ vast. Omdat $|1 - \cos(x/a)| \leq 2$, geldt $|\varphi_a(x)| \leq \frac{2a}{\pi x^2}$, dus $\lim_{a\downarrow 0} |\varphi_a(x)| = 0$, dus $\lim_{a\downarrow 0} \varphi_a(x) = 0$.
- Zij nu $q \geq p > 0$. Dan geldt voor vaste $a > 0$ met de substitutie $y = x/a$:

$$\begin{aligned}\frac{a}{\pi} \int_p^q \frac{1 - \cos(x/a)}{x^2}\,dx &= \frac{1}{\pi} \int_{p/a}^{q/a} \frac{1 - \cos(y)}{y^2}\,dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1 - \cos(y)}{y}\right]_{p/a}^{q/a} + \frac{1}{\pi} \int_{p/a}^{q/a} \frac{\sin(y)}{y}\,dy.\end{aligned}$$

Voor $p \downarrow 0$ en $q \to \infty$ gaat de eerste term in de laatste uitdrukking naar nul (gebruik Taylor: $\cos(y) = 1 + \mathcal{O}(y^2)$), en de tweede naar $1/2$ volgens de opmerking op blz. 92. Dus $\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x/a)}{x^2}\,dx = 1$, omdat de integrand een even functie is.

- Voor het derde onderdeel definiëren we $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$, dan is $\varphi_a(x) = \frac{1}{\pi a} f(x/a)$. Volgens opgave 4.5.4 geldt $\widehat{\varphi_a}(s) = \frac{1}{\pi}\widehat{f}(as)$, en volgens opgave 4.5.14(g) hebben we $\widehat{f}(as) = \pi(1 - a|s|)$ voor $a|s| < 1$. Dus $\lim_{a\downarrow 0} \widehat{\varphi_a}(s) = 1$.

  (Merk op: met de uitbreiding $\varphi_a(0) = (2a\pi)^{-1}$ wordt φ_a continu).

(e) Duidelijk is voor $x \neq 0$: $\lim_{a\downarrow} \varphi_a(x) = \frac{0}{x^2} = 0$.

Substitueer $x = au$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^{-1}}{u^2+1}du &= \pi^{-1}[\lim_{q\to\infty} \arctan(q) - \lim_{p\to-\infty} \arctan(p)] \\ &= \pi^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Bereken de Fouriergetransformeerde van de funktie f gegeven door $f(t) = e^{-a|t|}$ voor $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{(-a-is)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-is)t}dt = \frac{1}{a+is} + \frac{1}{a-is} = \frac{2a}{a^2+s^2} \\ &= 2\pi\varphi_a(s) \end{aligned}$$

Volgens de Fourierinversie formule voor f (mooie vorm) is

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{ist}ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(s)e^{ist}ds$$

Dus $\widehat{\varphi_a}(t) = f(-t) = e^{-a|t|}$. Dit gaat naar 1 als $a \downarrow 0$.

Opgave 6.8.6

(a) Per definitie $(x\mathcal{D}_\delta)(f) = \mathcal{D}_\delta(x \mapsto xf(x)) = 0 \cdot f(0) = 0$. Schrijven we formeel $(x\mathcal{D}_\delta)(f) = \mathcal{D}_{x\delta}(f)$, dan $x\delta(x) = 0$.

(b) Per definitie

$$(x\mathcal{D}'_\delta)(f) = \mathcal{D}'_\delta(x \mapsto xf(x)) = -(xf(x))'(0) = -(xf'(x)+f(x))(0) = -f(0).$$

Maar $f(0) = \mathcal{D}_\delta(f)$. Schrijven we formeel $\mathcal{D}'_\delta(f) \equiv \mathcal{D}_{\delta'}(f)$ en $x\mathcal{D}_{\delta'}(f) = \mathcal{D}_{x\delta'}(f)$, dan volgt uit $\mathcal{D}_{x\delta'}(f) = -\mathcal{D}_\delta(f)$ dat $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

(c) $(\xi\mathcal{D})'(f) = -(\xi\mathcal{D})(f') = \mathcal{D}(-\xi f')$, terwijl $(\xi'\mathcal{D} + \xi\mathcal{D}')(f) = (\xi'\mathcal{D})(f) + (\xi\mathcal{D}')(f) = \mathcal{D}(\xi' f - (\xi f)')$. Maar volgens de produktregel is $\xi' f - (\xi f)' = -\xi f'$ dus beide distributies zijn gelijk: $(\xi\mathcal{D})' = \xi'\mathcal{D} + \xi\mathcal{D}'$. Merk de overeenkomst op met de gewone produktregel voor functies.

Opgave 6.8.7

(1) Er geldt voor $s \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(s) &= \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-ist}dt + \int_{0}^{1} (1-t)e^{-ist}dt \\
&= \left[\frac{1}{s^2}e^{-ist}(1+is+ist)\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-1}{s^2}e^{-ist}(1-is+ist)\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{2}{s^2}(1-\cos s).
\end{aligned}$$

Voor $s = 0$ geldt $\widehat{\varphi}(0) = 1$.

Er geldt voor $s \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\psi(t)\,dt = \int_{-1}^{0} e^{-ist}dt + \int_{0}^{1} (-e^{-ist})dt \\
&= \left[-\frac{1}{is}e^{-ist}\right]_{1}^{0} + \left[\frac{-1}{is}e^{-ist}\right]_{0}^{1} = -\frac{2}{is}(1-\cos s).
\end{aligned}$$

Voor $s = 0$ geldt $\widehat{\psi}(0) = 0$.

(2) (a) Neem een testfunctie $f \in \mathcal{S}$. Dan is per definitie

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_{\varphi}(f) &= -\mathcal{D}_{\varphi}(f') = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt \\
&= -\int_{-1}^{0} (1+t)f'(t)dt - \int_{0}^{1} (1-t)f'(t)dt \\
&= -[(1+t)f(t)]_{t=-1}^{t=0} + \int_{-1}^{0} f(t)dt - [(1-t)f(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_{0}^{1} f(t)dt \\
&= -f(0) + 0 - 0 + f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(t)dt \\
&= \mathcal{D}_{\psi}(f)
\end{aligned}$$

(b) Neem een testfunctie $f \in \mathcal{S}$. Dan is per definitie

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\psi(f) &= -\mathcal{D}_\psi(f') \quad = \quad -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\psi(t)dt \\
&= -\int_{-1}^{0} f'(t)dt + \int_{0}^{1} f'(t)dt \\
&= -f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) \quad = \quad f(-1) - 2f(0) + f(1) \\
&= \mathcal{R}(f)
\end{aligned}$$

(c) Neem een testfunctie $f \in \mathcal{S}$. Dan geldt

$$\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \mathcal{D}_\varphi(\widehat{f}) = \mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f)\ ,$$

omdat φ absoluut integreerbaar is. Dus

$$\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{\varphi}(s)\ ds = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{1-\cos s}{s^2}\ ds\ .$$

De functie ψ is ook absoluut integreerbaar. Net als boven, krijgen we

$$\widehat{\mathcal{D}}_\psi(f) = \mathcal{D}_\psi(\widehat{f}) = \mathcal{D}_{\widehat{\psi}}(f)\ ,$$

waaruit volgt dat

$$\widehat{\mathcal{D}}_\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{\psi}(s)\ ds = 2i\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{1-\cos s}{s}\ ds\ .$$

Ten slotte,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}(f) &= \mathcal{R}(\widehat{f}) = \widehat{f}(-1) - 2\widehat{f}(0) + \widehat{f}(1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{is}ds - 2\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-is}ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\left(e^{is} + e^{-is} - 2\right)ds \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} f(s)(1-\cos s)ds\ .
\end{aligned}$$

(d) Neem een testfunctie $f \in \mathcal{S}$. Dan is per definitie

$$\begin{aligned}
(ix\widehat{\mathcal{D}}_\varphi)(f) &= \widehat{\mathcal{D}}_\varphi(x \mapsto ixf(x)) = 2\int_{-\infty}^{\infty} (ixf(x))\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \\
&= 2i\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\frac{1-\cos s}{s}\,ds = \widehat{\mathcal{D}}_\psi(f)\ , \\
(ix\widehat{\mathcal{D}}_\psi)(f) &= \widehat{\mathcal{D}}_\psi(x \mapsto ixf(x)) = 2i\int_{-\infty}^{\infty} (ixf(x))\frac{1-\cos x}{x}\,dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} f(s)(1-\cos s)ds = \widehat{\mathcal{R}}(f)\ .
\end{aligned}$$

Het klopt dus.

Opgave 6.8.8

(a) Er geldt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}e^{-|x|}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-isx}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-isx}e^{-x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(is-1)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(is+1)x}dx \\
&= \lim_{R\to-\infty}\left[\frac{e^{-(is-1)x}}{-(is-1)}\right]_R^0 + \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-(is+1)x}}{-(is+1)}\right]_0^R \\
&= -\frac{1}{is-1} + \frac{1}{is+1} = \frac{-(is+1)+is-1}{(is+1)(is-1)} = \frac{2}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

(b) We hebben

$$\mathcal{D}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-|x|}dx.$$

Voor iedere $f \in S$ geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\varphi(f) &= -\mathcal{D}_\varphi(f') = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-|x|}dx \\
&= -\left(\int_{-\infty}^{0} f'(x)e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} f'(x)e^{-x}dx\right) \\
&= -\left(\lim_{R\to-\infty} [f(x)e^{x}]_R^0 - \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{x}dx \right. \\
&\quad \left. + \lim_{R\to\infty} \left[f(x)e^{-x}\right]_0^R + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx\right) \\
&= -\left(f(0) - f(0) - \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{x}dx - \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx,
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}''_\varphi(f) &= -\mathcal{D}'{}_\varphi(f') = -\int_{-\infty}^{0} f'(x)e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} f'(x)e^{-x}dx \\
&= -\left(f(0) + f(0) - \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{x}dx - \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx\right) \\
&= -2f(0) + \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx \\
&= -2f(0) + \mathcal{D}_\varphi(f).
\end{aligned}$$

(c) Uit (b) volgt meteen dat

$$-\mathcal{D}''_\varphi(f) + \mathcal{D}_\varphi(f) = 2f(0). \tag{2}$$

(d) Per definitie geldt $f(0) = \mathcal{D}_\delta(f)$ waarin $\mathcal{D}_\delta$ de Dirac's deltadistributie is. Er geldt dat $\widehat{\mathcal{D}}_\delta = \mathcal{D}_1$ (**Voorbeeld 1**, blz. 168) en $\widehat{\mathcal{D}''}_\varphi = (ix)^2\widehat{\mathcal{D}}_\varphi$ (gebruik hiervoor twee keer formule (164), blz. 170). De Fouriettransformatie van (2) levert inderdaad

$$(x^2+1)\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = 2\mathcal{D}_1(f)\ , \quad f \in \mathcal{S},$$

ofwel

$$\widehat{\mathcal{D}}_\varphi = \frac{2}{x^2+1}\mathcal{D}_1.$$

(e) Wegens (d) hebben we

$$\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) = \frac{2}{x^2+1}\mathcal{D}_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2}{x^2+1}\,dx = \mathcal{D}_{\widehat{\varphi}}(f)\ ,$$

in overeenstemming met (a).

Opgave 6.8.9

De Fourier inverse formule

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{ist}ds$$

geldt voor iedere $f \in \mathcal{S}$.

(a) Als $\varphi(s) = \sin s$ dan

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) &= \mathcal{D}_\varphi(\widehat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)(\sin s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\left(\frac{e^{is}-e^{-is}}{2i}\right)ds \\
&= -i\pi\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{is}ds}_{f(1)} + i\pi\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{-is}ds}_{f(-1)} \\
&= -i\pi(f(1)-f(-1))\ .
\end{aligned}$$

(b) Als $\varphi(s) = \cos s$ dan

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) &= \mathcal{D}_\varphi(\widehat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)(\cos s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\left(\frac{e^{is}+e^{-is}}{2}\right)ds \\
&= \pi\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{is}ds}_{f(1)} + \pi\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{-is}ds}_{f(-1)} \\
&= \pi(f(1)+f(-1))\ .
\end{aligned}$$

(c) Als $\varphi(s) = (\cos s)^2$ dan

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f) &= \mathcal{D}_\varphi(\widehat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)(\cos s)^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \left(\frac{e^{is} + e^{-is}}{2}\right)^2 ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \left(\frac{e^{2is} + 2 + e^{-2is}}{4}\right) ds \\
&= \frac{\pi}{2} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2is} ds}_{f(2)} + \pi \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\, ds}_{f(0)} + \frac{\pi}{2} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{-2is} ds}_{f(-2)} \\
&= \frac{\pi}{2}(f(2) + 2f(0) + f(-2))\ .
\end{aligned}$$

Opgave 6.8.10

Zij $\varphi(x) = \sin x$. Dan $\mathcal{D}_\psi(f) = (x\mathcal{D}_\varphi)(f)$ voor elke $f \in \mathcal{S}$. Met de formule $\widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$, krijgen we

$$\widehat{\mathcal{D}}_\psi(f) = \widehat{(x\mathcal{D}_\varphi)}(f) = (x\mathcal{D}_\varphi)(\widehat{f}\ ) = \mathcal{D}_\varphi(x\widehat{f}\ ) = -i\mathcal{D}_\varphi(ix\widehat{f}\ ) = -i\mathcal{D}_\varphi(\widehat{f'}) = -i\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f').$$

Uit onderdeel (a) van opgave 6.8.9 volgt $\widehat{\mathcal{D}}_\varphi(f') = -i\pi(f'(1) - f'(-1))$, zodat

$$\widehat{\mathcal{D}}_\psi(f) = -\pi(f'(1) - f'(-1)).$$

Opgave 6.8.11

De differentiaalvergelijking is

$$v''(t) + v(t) = u(t) \quad \text{met} \quad u(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases} \tag{3}$$

(a) Voor $f \in \mathcal{C}$ geldt $f(t) \to 0$ als $t \to \pm\infty$. We hebben

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_G(f) &= \int_0^{\infty} f(t) \sin t\, dt, \\
\mathcal{D}'_G(f) &= -\mathcal{D}_G(f') = -\int_0^{\infty} f'(t) \sin t\, dt, \\
&= -\lim_{R\to\infty} [f(t)\sin t]_0^R + \int_0^{\infty} f(t) \cos t\, dt \\
&= f(0)\sin 0 + \int_0^{\infty} f(t)\cos t\, dt = \int_0^{\infty} f(t) \cos t\, dt
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_G''(f) &= -\mathcal{D}_G'(f') = -\int_0^\infty f'(t)\cos t\,dt, \\
&= -\lim_{R\to\infty}\left[f(t)\cos t\right]_0^R - \int_0^\infty f(t)\sin t\,dt \\
&= f(0)\cos 0 - \int_0^\infty f(t)\sin t\,dt = f(0) - \mathcal{D}_G(f).
\end{aligned}$$

Dus geldt $\mathcal{D}_G''(f) + \mathcal{D}_G(f) = f(0)$ voor iedere $f \in \mathcal{C}$, zodat

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & t \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

voldoet aan $G''(t) + G(t) = \delta(t)$.

(b) Er geldt

$$(u * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)G(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tau)G(t-\tau)\,d\tau.$$

Nu gebruik we (4). Als $t \leq -\pi$, dan is

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin\tau)G(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin\tau)\cdot 0\cdot d\tau = 0.$$

Als $|t| < \pi$, dan is

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\sin\tau)G(t-\tau)\,d\tau &= \int_{-\pi}^{t} (\sin\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_{-\pi}^{t} \left(\frac{e^{i\tau}-e^{-i\tau}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i(t-\tau)}-e^{-i(t-\tau)}}{2i}\right)dt \\
&= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{t} \left(e^{it} - e^{-it}e^{2i\tau} - e^{it}e^{-2i\tau} + e^{-it}\right)d\tau \\
&= -\frac{1}{4}\left((t+\pi)(e^{it}+e^{-it}) - e^{-it}\frac{(e^{2it}-1)}{2i} + e^{it}\frac{(e^{-2it}-1)}{2i}\right) \\
&= -\frac{t+\pi}{2}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) \\
&= -\frac{t}{2}\cos t - \frac{\pi}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.
\end{aligned}$$

Als $t \geq \pi$, dan is

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\sin\tau) G(t-\tau)\, d\tau &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\tau}-e^{-i\tau}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i(t-\tau)}-e^{-i(t-\tau)}}{2i}\right) dt \\
&= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{it}-e^{-it}e^{2i\tau}-e^{it}e^{-2i\tau}+e^{-it}\right) d\tau \\
&= -\frac{1}{4}\left(2\pi(e^{it}+e^{-it})-e^{-it}\frac{(1-1)}{2i}+e^{it}\frac{(1-1)}{2i}\right) \\
&= -\pi\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = -\pi\cos t.
\end{aligned}$$

(c) De functie

$$v(t) = (u * G)(t) = \begin{cases} 0, & t < -\pi, \\ -\frac{t}{2}\cos t - \frac{\pi}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t, & |t| \leq \pi, \\ -\pi\cos t, & t > \pi, \end{cases}$$

is continu voor $t \in \mathbb{R}$ en willekeurig vaak differentieerbaar voor $t \neq \pm\pi$. Bovendien geldt dat

$$v'(\mp\pi^-) = v'(\mp\pi^+) = 0,\ \ v''(-\pi^-) = v''(-\pi^+) = 0,\ \ v''(\pi^-) = v''(\pi^+) = -\pi.$$

Dus is v twee keer continu-differentieerbaar. Verder geldt

$$v''(t) + v(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \geq \pi, \end{cases}$$

zodat v aan de differentiaalvergelijking (3) voldoet.

Opgave 6.8.12

Bij de homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$w''(t) + 2w'(t) + w(t) = 0 \tag{5}$$

hoort de karakteristieke veelterm $P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$. Deze heeft één nulpunt $z_1 = -1$ met multipliciteit twee. Dus is de algemene oplossing van (5) gegeven door

$$w(t) = ae^{-t} + bte^{-t} = (a + bt)e^{-t}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Deze oplossing voldoet aan $w(0) = 0$ en $w'(0) = 1$ als $a = 0$ en $b = 1$. Dan is $w(t) = te^{-t}$.

Volgens de theorie, is de functie

$$G(t) = H(t)w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ te^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

een (gegeneraliseerde) oplossing van de differentiaalvergelijking

$$G''(t) + 2G'(t) + G(t) = \delta(t).$$

Dan is

$$G(t-1) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t-1)e^{-(t-1)}, & t \geq 1, \end{cases}$$

een (gegeneraliseerde) oplossing van de differentiaalvergelijking

$$G''(t-1) + 2G'(t-1) + G(t-1) = \delta(t-1).$$

Wegens de lineariteit geldt dan dat

$$v(t) = G(t) + G(t-1) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ te^{-t}, & 0 \leq t < 1, \\ te^{-t} + (t-1)e^{-(t-1)} & t \geq 1, \end{cases}$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = \delta(t) + \delta(t-1).$$

Om deze intuitieve benaderingen te rechtvaardigen, moeten we bewijzen dat de distributie

$$\mathcal{D}_v(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)v(t)\,dt = \int_0^1 f(t)te^{-t}\,dt + \int_1^{\infty} f(t)(te^{-t} + (t-1)e^{-(t-1)})dt$$

voldoet aan de vergelijking

$$\mathcal{D}_v'' + 2\mathcal{D}_v'(f) + \mathcal{D}_v(f) = f(0) + f(1)$$

voor iedere $f \in \mathcal{C}$. Inderdaad,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_v'(f) &= -\mathcal{D}_v(f') \\
&= -\int_0^1 f'(t)te^{-t}\,dt - \int_1^\infty f'(t)[te^{-t} + (t-1)e^{-(t-1)}]dt = \\
&= -\,[f(t)te^{-t}]_0^1 + \int_0^1 f(t)(1-t)e^{-t}dt \\
&\quad -\,[f(t)(te^{-t} + (t-1)e^{-(t-1)})]_1^\infty \\
&\quad + \int_1^\infty f(t)((1-t)e^{-t} + (2-t)e^{-(t-1)})dt \\
&= \int_0^1 f(t)(1-t)e^{-t}\,dt + \int_1^\infty f(t)((1-t)e^{-t} + (2-t)e^{-(t-1)})dt
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_v''(f) &= -\mathcal{D}_v'(f') \\
&= -\int_0^1 f'(t)(1-t)e^{-t}dt - \int_1^\infty f'(t)((1-t)e^{-t} + (2-t)e^{-(t-1)})dt \\
&= -[f(t)(1-t)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 f(t)(t-2)e^{-t}dt \\
&\quad -[f(t)((1-t)e^{-t} + (2-t)e^{-(t-1)})]_1^\infty \\
&\quad + \int_1^\infty f(t)((t-2)e^{-t} + (t-3)e^{-(t-1)})dt \\
&= f(0) + f(1) \\
&\quad + \int_0^1 f(t)(t-2)e^{-t}dt + \int_1^\infty f(t)((t-2)e^{-t} + (t-3)e^{-(t-1)})\,dt,
\end{aligned}$$

zodat

$$\mathcal{D}_v'' + 2\mathcal{D}_v'(f) + \mathcal{D}_v(f) \;=\; f(0) + f(1) + \int_0^1 f(t)\underbrace{((t-2)e^{-t} + 2(1-t)e^{-t} + te^{-t})}_{0}dt +$$

$$\int_1^\infty f(t)\underbrace{((t-2)e^{-t} + (t-3)e^{-(t-1)} + 2(1-t)e^{-t} + 2(2-t)e^{-(t-1)} + te^{-t} + (t-1)e^{-(t-1)})}_{0}dt$$

$$= \; f(0) + f(1).$$