Uitwerking van het deeltentamen I Fouriertheorie
5 november 2008

1. (a) De reeks is divergent. Inderdaad, er geldt $\ln n < n$ voor $n \geq 2$ en dus

$$b_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} = a_n \ .$$

De reeks $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ is divergent omdat de harmonische reeks divergeert. Als $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ een convergente reeks zou zijn, volgt (uit het majorantiecriterium) dat ook de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ convergeert. Dus $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ moet ook divergeren.

(b) De reeks is convergent. De Taylor formula impliceert $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ als $x \downarrow 0$. Hieruit volgt dat

$$a_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

als $n \to \infty$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent, dus is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ook convergent.

(c) De reeks is divergent. Inderdaad, er geldt $a_n > 0$ als $n \geq 1$ omdat

$$a_n = \sqrt[n]{x} - 1 = x^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1$$

en $\ln x > 0$ voor $x > 1$. Verder hebben we met $t_n = \frac{1}{n}$ dat

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{\varepsilon \ln x} - 1}{\varepsilon} = \ln x > 0 \ .$$

Volgens het limietcriterium is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent, omdat $L \neq 0$ en de harmonische reeks $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ divergent is. Maar dit betekent precies dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert, want $|a_n| = a_n$.

2. (a) De integraal convergeert volgens het majorantiecriterium, want

$$0 < \frac{1}{x + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{voor alle } x \in (0, 1]$$

en $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ bestaat.

(b) De integraal convergeert. Met behulp van partiële integratie:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx \;=\; [x \ln(\sin x)]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin x}\, dx \;=\; -\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} \cos x\, dx$$

voor $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Er geldt $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = 0$. Inderdaad:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon\downarrow 0} [(\sin \varepsilon) \ln(\sin \varepsilon)] = 1 \cdot \lim_{y\downarrow 0} y \ln y = 1 \cdot 0 = 0,$$

want $\lim_{y\downarrow 0} y \ln y = \lim_{x\to -\infty} x e^x = 0$.

De functie $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} \cos x$ is continu op $(0,1]$ en $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$. Hieruit volgt dat

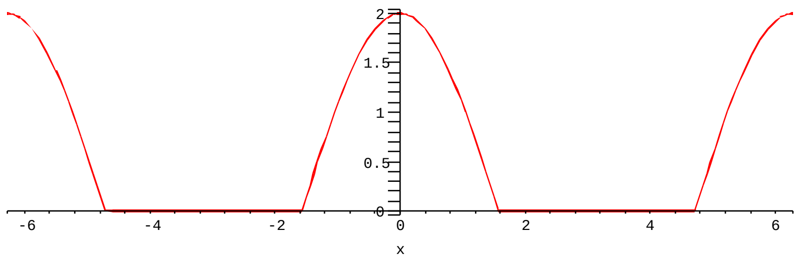
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin x}\, dx$$

bestaat samen met

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin x}\, dx\ .$$

3. (a) De functie f is 2π-periodiek en is gegeven voor $|x| \le \pi$ door

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{als } \ |x| \le \frac{\pi}{2}\ , \\ 0 & \text{als } \ \frac{\pi}{2} \le |x| \le \pi\ . \end{cases}$$



(b) Enig rekenwerk:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\, e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{ix}+e^{-ix}\right) e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(1-n)x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i(1+n)x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{i(1-n)x}}{i(1-n)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{e^{-i(1+n)x}}{-i(1+n)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}e^{-\frac{i\pi n}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi n}{2}}}{i(1-n)} + \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}e^{-\frac{i\pi n}{2}} - e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{i\pi n}{2}}}{-i(1+n)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{ie^{-\frac{i\pi n}{2}} + ie^{\frac{i\pi n}{2}}}{i(1-n)} + \frac{-ie^{-\frac{i\pi n}{2}} - ie^{\frac{i\pi n}{2}}}{-i(1+n)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(e^{\frac{i\pi n}{2}} + e^{\frac{-i\pi n}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{1-n^2}
\end{aligned}$$

als $n \neq \pm 1$ en

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ix}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\, e^{-ix}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{ix}+e^{-ix}\right)e^{-ix}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2ix}dx \;=\; \frac{1}{2}\,, \\
\widehat{f}_{-1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ix}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\, e^{ix}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{ix}+e^{-ix}\right)e^{ix}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2ix}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \;=\; \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(c) De functie $f(x)$ is 2π-periodiek, continu en stuksgewijs continu differentieerbaar. De Fourier inversie formule geeft dan voor iedere $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}_n e^{inx} = \widehat{f}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\widehat{f}_n e^{inx} + \widehat{f}_{-n}e^{-inx}),$$

waarin de limiet bestaat en de reeks convergeert. We hebben

$$\widehat{f}_0 = \frac{2}{\pi}, \quad \widehat{f}_1 = \widehat{f}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \text{en} \quad \widehat{f}_n = \widehat{f}_{-n} = \frac{2}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{1-n^2} \quad \text{voor} \quad n = 2,3,4,\ldots.$$

Maar

$$\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{als } \; n = 2k+1,\; k = 1,2,3,\ldots; \\ (-1)^k & \text{als } \; n = 2k,\; k = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

zo dat

$$\begin{aligned}
f(x) &= \widehat{f}_0 + \widehat{f}_1 e^{ix} + \widehat{f}_{-1}e^{-ix} + \sum_{n=2}^{\infty}(\widehat{f}_n e^{inx} + \widehat{f}_{-n}e^{-inx}) \\
&= \frac{2}{\pi} + \cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}\left(\frac{e^{i2kx}+e^{-i2kx}}{2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi} + \cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}\cos(2kx)\,.
\end{aligned}$$

(d) Voor $x = 0$ hebben we

$$2 = f(0) = \frac{2}{\pi} + 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

waaruit volgt dat

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-\frac{1}{4}} = 2-\pi\,.$$

Voor $x = \frac{\pi}{2}$ hebben we

$$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \cos(k\pi)\,.$$

Maar $\cos(k\pi) = (-1)^k$ voor $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dus

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k^2 - \frac{1}{4}} \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = 2\,.$$

4. De functie $g(x) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ is continu en absoluut integreerbaar met $\widehat{g}(s) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}s^2}$. Verder geldt dat $f(t) = \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_2(t)$ met $f_1(t) = e^{it} g(t)$ en $f_2(t) = e^{-it} g(t)$. Maar $\widehat{f_1}(s) = g(s-1)$ en $\widehat{f_2}(s) = g(s+1)$, resp. Dus

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \frac{1}{2}\widehat{f_1}(s) + \frac{1}{2}\widehat{f_2}(s) = \frac{1}{2}(g(s-1) + g(s+1)) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-\frac{1}{2}(s-1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(s+1)^2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \left(e^{s} + e^{-s} \right) e^{-\frac{1}{2}s^2}. \end{aligned}$$

5. De meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ met $z = \frac{1}{2}e^{ix}$ is convergent omdat $|z| = \frac{1}{2} < 1$. Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{ix}} = \frac{2}{2 - e^{ix}}\,.$$

Maar $e^{inx} = (\cos nx + i \sin nx)$ en de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x}{2^n}$ zijn (absoluut) convergent. Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}\,.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} &= \operatorname{Im}\left(\frac{2}{2 - e^{ix}} \right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2}{2 - \cos x - i \sin x} \right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{2(2 - \cos x + i \sin x)}{(2 - \cos x)^2 + \sin^2 x} \right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{2(2 - \cos x + i \sin x)}{4 - 4\cos x + (\cos^2 x + \sin^2 x)} \right) \\ &= \frac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}\,. \end{aligned}$$