Uitwerking van het deeltentamen II Fouriertheorie
28 januari 2009

Opgave 1 [30pt]

1. We hebben
$$\widehat{u}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}u(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-ist}e^{-t}dt = -2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(is+1)t}dt = -\frac{2}{is+1} \ .$$

2. Stel dat de oplossing $v(t)$ een continue, absoluut integreerbare en stuksgewijs continu-differentieerbare functie is, die bovendien voldoet aan
$$\lim_{t\to\pm\infty} v(t) = 0. \qquad (1)$$
Dan wordt de Fouriergetransformeerde van
$$v'(t) - v(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$
gegeven door
$$is\widehat{v}(s) - \widehat{v}(s) = \widehat{u}(s).$$
Dus
$$\widehat{v}(s) = \frac{\widehat{u}(s)}{is-1} = -\frac{2}{(is+1)(is-1)} = \frac{2}{s^2+1} \ .$$

3. Er geldt de volgende bereuksplitsing:
$$\frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{is+1} - \frac{1}{is-1} \ ,$$
waaruit blijkt dat
$$v(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0, \\ e^{-t}, & t \geq 0, \end{cases}$$
ofwel $v(t) = e^{-|t|}$. Deze functie is inderdaad continu, absoluut integreerbaar, stuksgewijs continu-differentieerbaar en voldoet aan (1). Bovendien voldoet $v(t)$ aan de differentiaalvergelijking (2): Als $t < 0$ dan $v'(t) - v(t) = e^t - e^t = 0$; Als $t \geq 0$ dan $v'(t) - v(t) = -e^{-t} - e^{-t} = -2e^{-t}$.

Opgave 2 [35pt]

1. We berekenen de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}$:

   voor $s \neq 0$ is
$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ist}dt = \left[\frac{e^{-ist}}{-2is}\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{\sin s}{s} \ ;$$
   voor $s = 0$ is
$$\widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt = 1.$$
   Dus $f(x) = \widehat{g}^{\,2}(x) = (\widehat{g}(x))^2$.

2. Omdat g even is,

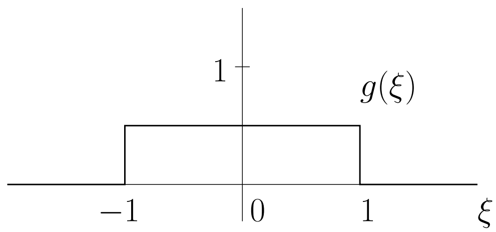
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)g(x-\xi)d\xi \overset{\xi\to-\xi}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)g(x+\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)g(-x-\xi)d\xi$$

ofwel $(g*g)(x) = (g*g)(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Verder hebben we

$$(g*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)g(x-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)g(\xi+x)d\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(\xi+x)d\xi \ .$$

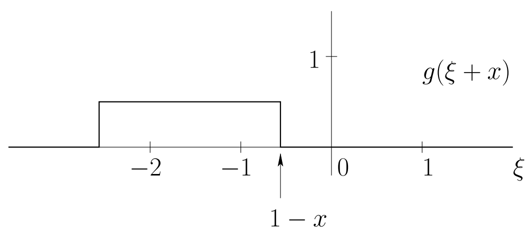
Hieruit volgt dat

voor $x = 0$:



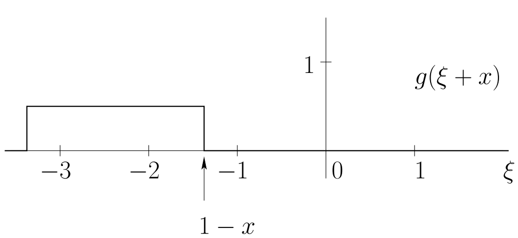
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(\xi+0)d\xi = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} d\xi = \frac{2}{4} \ ;$$

voor $0 < x < 2$:

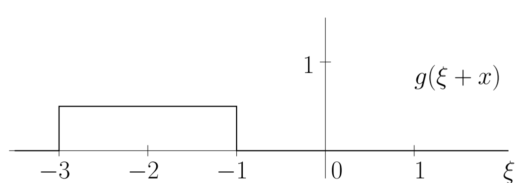


$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(\xi+x)d\xi = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1-x} d\xi = \frac{1}{4}(1-x+1) = \frac{1}{4}(2-x) \ ;$$

voor $x \geq 2$:



of



$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(\xi + x)d\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 0\ d\xi = 0.$$

Omdat $g * g$ even is, geldt dat

$$(g * g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - |x|), & |x| < 2; \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

3. Met de gegeven formule,

$$\widehat{f}(s) = (\widehat{\widehat{g}^{\,2}})(s) = 2\pi(g * g)(-s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2 - |s|), & |s| < 2; \\ 0, & |s| \geq 2. \end{cases}$$

Opgave 3 [35pt]

1. We schrijven $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Inzetten in de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3}$$

levert

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

ofwel

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}\ .$$

Het linkerlid is onafhankelijk van y, het rechterlid is onafhankelijk van x. Dit kan alleen maar als beide leden constant zijn: d.w.z. als voor een zekere constante $\lambda \in \mathbb{R}$

$$X''(x) = \lambda X(x), \tag{4}$$
$$Y''(y) = -\lambda Y(x). \tag{5}$$

Om aan de voorwaarde (a) te voldoen, moet

$$X(0) = X(1) = 0. \tag{6}$$

Zoals bekend heeft (4) een niet-triviale oplossing die voldoet aan (6) dan en slechts dan als

$$\lambda = -\pi^2 n^2\ ,$$

met de oplossing

$$X(x) = \sin(n\pi x)$$

waarin $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Met deze λ, wordt (5)

$$Y''(y) - n^2\pi^2 Y(y) = 0\ .$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is

$$Y(y) = Ae^{n\pi y} + Be^{-n\pi y}$$

met willekeurige $A, B \in \mathbb{R}$. Om aan de voorwaarde (b) te voldoen, moet $\lim_{y\to\infty} Y(y) = 0$ zijn. Dit impliceert $A = 0$.

Dus voldoet een veelvoud van de functie

$$u_n(x, y) = \sin(n\pi x)e^{-n\pi y}$$

met $n = 1, 2, 3, \ldots$ zowel aan de differentiaalvergelijking (3) als aan de voorwaarden (a) en (b). De algemene oplossing is van (3) – die voldoet aan de condities (a) en (b) – krijgen we door de superpositie van deze oplossingen te nemen:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)e^{-n\pi y} \ .$$

2. Om aan de voorwaarde (c) te voldoen, moeten we hebben $u(x, 0) = f(x)$ ofwel

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = f(x) \ .$$

Dit is de sin-Fourierreeks voor een oneven functie $g(x)$ met periode 2 die gelijk is aan f op $[0, 1]$. Deze functie is continu differentieerbaar. De bekende formule voor de Fouriercoëfficiënten geeft in dit geval:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(s)\sin(n\omega s)\ ds = \int_0^2 g(z)\sin(n\pi z)\ dz$$

(neem $T = 2, \omega = \pi$). De laatste integraal kan herschreven worden als

$$b_n = 2\int_0^1 f(z)\sin(n\pi z)\ dz \ .$$

3. Voor $0 < x < 1, y > 0$ krijgen we dus

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)e^{-n\pi y} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\int_0^1 f(z)\sin(n\pi z)\ dz\right)\sin(n\pi x)e^{-n\pi y} \\
&= \int_0^1 \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\sin(n\pi z)e^{-n\pi y}\right) f(z)\ dz \\
&= \int_0^1 K(x, y, z)f(z)\ dz
\end{aligned}$$

waarin

$$K(x,y,z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\sin(n\pi z)e^{-n\pi y} \ .$$

We mogen integratie en sommatie verwisselen omdat de som vanwege de faktor $e^{-n\pi y}$ snel convergeert als $y > 0$.

Met behulp van de formule van Euler en

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\pi(is-y)} = \frac{1}{1-e^{\pi(is-y)}} \ - \ 1 \ , \qquad s \in \mathbb{R},\ y > 0,$$

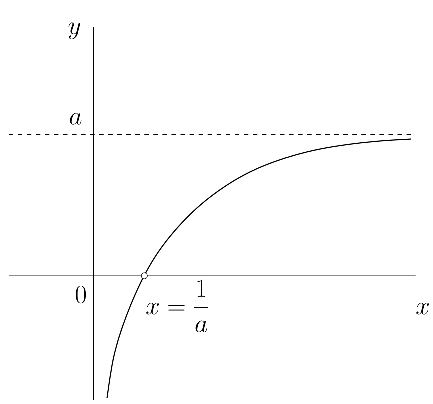
kunnen we expliciet uitrekenen:

$$\begin{aligned}
K(x,y,z) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{n\pi x} - e^{-n\pi x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{n\pi z} - e^{-n\pi z}}{2i}\right) e^{-n\pi y} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (e^{n\pi x} - e^{-n\pi x})(e^{-n\pi z} - e^{n\pi z})e^{-n\pi y} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{n\pi(i(x-z)-y)} + e^{n\pi(-i(x-z)-y)} - e^{n\pi(i(x+z)-y)} - e^{n\pi(-i(x+z)-y)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{\pi(i(x-z)-y)}} + \frac{1}{1-e^{\pi(-i(x-z)-y)}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{\pi(i(x+z)-y)}} + \frac{1}{1-e^{\pi(-i(x+z)-y)}}\right) \\
&= \frac{1 - e^{-\pi y}\cos(\pi(x-z))}{1 - 2e^{-\pi y}\cos(\pi(x-z)) + e^{-2\pi y}} - \frac{1 - e^{-\pi y}\cos(\pi(x+z))}{1 - 2e^{-\pi y}\cos(\pi(x+z)) + e^{-2\pi y}} \ .
\end{aligned}$$

Bonus Opgave [20pt] Zij $a > 0$. Beschouw de integraal

$$I = \int_0^{\infty} \delta\left(a - \frac{1}{x}\right) f(x)dx$$

waarin $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ een continue functie is. De substitutie $y = a - \dfrac{1}{x}$



is gedefineerd voor $0 < x < \infty$ en is inverteerbaar op $-\infty < y < a$ met

$$x = \frac{1}{a-y}, \quad dx = \frac{dy}{(a-y)^2} \ .$$

Dus

$$I = \int_{-\infty}^{a} \delta(y) f\left(\frac{1}{a-y}\right) \frac{1}{(a-y)^2}\, dy = f\left(\frac{1}{a-y}\right) \frac{1}{(a-y)^2}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{a^2} f\left(\frac{1}{a}\right) \ .$$