Inleiding Analyse 2009

Extra opgaven

Opgave A

Stel

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

In $(0,0)$ is f niet gedefinieerd.
We bestuderen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

1. Bepaal de waarde van $f(x,y)$ op een willekeurige rechte lijn door $(0,0)$. Bepaal de limiet van $f(x,y)$ als (x,y) langs die rechte lijn naar $(0,0)$ nadert. N.B. Je moet alle mogelijke rechte lijnen door (0,0) onderzoeken.

2. Bepaal nu het gedrag van $f(x,y)$ op de kromme $x = y^2$ in de buurt van $(0,0)$.

3. Bewijs dat niet geldt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Hiervoor kun je bijvoorbeeld een geschikte negatie van de limietdefinitie opstellen en laten zien dat f aan deze negatie voldoet.

4. Bewijs dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ niet bestaat. Is dit resultaat verrassend? Waarom wel of waarom niet? Plot eventueel de grafiek van de functie met Mathematica.

Opgave B

Stel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zijn functies.

We definiëren voor alle $x \in \mathbb{R}^n$:
$k(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, d.w.z. het maximum van $f(x)$ en $g(x)$
$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, d.w.z. het minimum van $f(x)$ en $g(x)$.

Met $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat bedoelen we: er is een $p \in \mathbb{R}$ zodat $\lim_{x\to a} f(x) = p$.

a. Bewijs: als $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat ook, dan bestaan $\lim_{x\to a} h(x)$ en $\lim_{x\to a} k(x)$. Hint: onderscheid eventueel verschillende gevallen.

b. Geldt het omgekeerde ook? Dat wil zeggen: als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten zijn ongelijk, volgt dan dat $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat?
Zo ja, geef een bewijs, en zo nee, geef een tegenvoorbeeld. Laat in dit geval precies zien waarom je tegenvoorbeeld niet aan de limietdefinitie voldoet.

c. Als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten gelijk zijn aan elkaar, onderzoek dan ook of $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat. Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Opgave C

Stel a, b, c, d zijn reële getallen met $a < b$ en $c < d$. Stel $f : [a, b] \to [c, d]$ is een reële functie die monotoon stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) \leq f(y)$) en surjectief ($f([a, b]) = [c, d]$).

(i) Bewijs $f(a) = c$ en $f(b) = d$.

(ii) Bewijs dat f continu is.

Veronderstel nu dat f ook monotoon strikt stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) < f(y)$).

(iii) Laat zien dat de inverse functie f^{-1} bestaat en continu is op $[c, d]$.

(iv) Veronderstel dat de functie f: $[0,1] \to [0,1]$ gegeven door $f(x) = x^n$ surjectief is. [We zullen later uit eigenschappen van de reële getallen bewijzen dat dit zo is.]

Laat zien dat de wortelfunctie $x \to \sqrt[n]{x}$ continu is op $[0,1]$.

Opgave D

We schrijven $[x]$ voor het grootste gehele getal dat $\leq x$ is.
Definieer voor $x > 0$ $f(x) = 1 - x[\frac{1}{x}]$ en $g(x) = x - x^2[\frac{1}{x}]$,
en $f(0) = g(0) = 0$.

(a) Bewijs dat $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ niet bestaat.

(b) Ga na of f continu is in 0. Bewijs je bewering.

(c) Ga na waar g differentieerbaar is. Bewijs je bewering. [Hint: onderscheid $x = 0$, $x = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ en de overige x.]

Opgave E.

We definieren als in opgave 2.5 de maximumnorm $\|x\|_m := \max(|x_1|, |x_2|)$ op $\mathbb{R}^2$ en we kiezen ook een willekeurige norm $\|\cdot\|_w$ op $\mathbb{R}^2$. Hiervan veronderstellen we alleen de eigenschappen in lemma 1.3 in het dictaat.

(a) Kies $x = (x_1, x_2)$ willekeurig in $\mathbb{R}^2$, en toon aan dat er een constante $q > 0$ bestaat zodat $\|x\|_w \leq q\|x\|_m$. Hint: schrijf $x = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$.

De bij $\|\cdot\|_i$ behorende afstand noteren we met d_i, en de door de metriek d_i gedefinieerde bol met middelpunt $a \in \mathbb{R}^2$ en straal $r > 0$ noteren we met $B_i(a; r)$, voor $i = w$ en $i = m$.

(b) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\epsilon > 0$ de bol $B_w(a; \epsilon)$ open is ten aanzien van de metriek d_m.

(c) Bewijs dat voor elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ geldt:
als A open is in d_w, dan is A open in d_m (en dus ook in de Euclidische metriek volgens opgave 2.5).

(d) Kun je voor $\mathbb{R}^n$ iets soortgelijks bewijzen, en zo ja, hoe?

Opgave F.

We noteren met $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \;\; x \geq 0\}$. We kiezen een element ω dat niet in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zit en we definiëren $V = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\omega\}$. We gaan V van een metriek voorzien.

(a) Definieer $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $0 \leq f(x) < 1$ en $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Maak een plaatje van de grafiek van f (Hint: $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$). We breiden f uit tot een functie $V \to \mathbb{R}$ door te definiëren $f(\omega) = 1$.

(b) Nu definiëren we voor $x, y \in V \;\; d_2(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Laat zien dat d_2 een metriek is op V.

(c) Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $d_2(x, y) \leq |x - y|$. Kies een vaste $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en laat $\delta > 0$ zodanig dat $\delta \leq 1$. Laat zien dat voor alle $x \in V$ met $|x - a| \leq \delta$ geldt $d_2(x, a) \geq \frac{1}{(a+2)^2} \cdot |x - a|$.

(d) We definieren nu de functie $g : V \to V$ door $g(0) = \omega$, $g(\omega) = 0$, en $g(x) = \frac{1}{x}$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $x > 0$. Laat zien dat voor $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $a > 0$ geldt $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ ook ten opzichte van de metriek d_2!

(e) Bewijs dat g continu is op V met metriek d_2.

Opgave G.

Stel $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ is een continue functie met de volgende eigenschappen:

(1) f is strikt monotoon stijgend,
(2) Er is een $x_0 > 0$ zodat $f(x_0) = x_0$,
(3) Voor alle x met $0 \leq x < x_0$ geldt $f(x) > x$,
(4) Voor alle x met $x > x_0$ geldt $f(x) < x$.

Kies nu $c \geq 0$. We definieren de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ door
$a_1 = c$ en $a_{n+1} = f(a_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel eerst $c < x_0$.

(i) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ strikt monotoon stijgend is.

(ii) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ begrensd is.

(iii) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat, en bepaal deze limiet.

(iv) Behandel nu het geval $c \geq x_0$.

(v) Ga na in hoeverre som 3.3, 3.5 (en eventueel 3.6) met opgave G behandeld kunnen worden. Bedenk nu zelf een som zoals 3.3, 3.5 of 3.6, waarbij van $(a_n)_{n\geq 1}$ de relatie tussen a_n en a_{n+1} concreet gegeven is.