Universiteit Utrecht · Universiteit Utrecht · Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut · 3584 CD Utrecht

Oefententamen 1 kansrekening 2007

1. Stel dat de simultane dichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y}{x} & \text{als } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (a) Laat zien dat $f_{Y|X}(y|x)$, de conditionele dichtheid van Y gegeven $X = x$, gegeven wordt door

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{als } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (b) Bepaal $E(Y|X = x)$ en $E(Y)$.

   (c) Bepaal $P(X + Y \leq 1)$.

   (d) Bepaal de simultane dichtheid van $U = (X + Y)/2$ en $V = (X - Y)/2$.

2. Laat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke, gelijkverdeelde stochasten zijn, met verdelingsfunctie

$$F(x) = P(X_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{als } x \geq 1, \end{cases}$$

   waar $\alpha > 0$.

   Definieer for $n \geq 1$

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

   (a) Bepaal de verdelingsfunctie van M_n.

   (b) Laat zien dat $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \Rightarrow Y$, waarbij Y een stochast is met verdelingsfunctie G gegeven door

$$G(x) = P(Y \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Zij $X_1, X_2, \ldots,$ een rij van onafhankelijke stochasten met X_n exponentieel verdeeld met parameter $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ (d.w.z. $P(X_n > x) = e^{-x/n}$ voor $x > 0$ en 0 anders).

(a) Laat zien dat $Y_n = X_n/n$ exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

(b) Zij $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$, en ϕ_{Z_n} de karakteristieke functie van Z_n. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \phi_{Z_n}(t) = e^{it}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq 1) = 1/2$.

4. Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rij van onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten met $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 1/2$. Definieer de stochasten Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, door

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{als } X_i = 1, \\ X_i - 1, & \text{als } X_i = 0. \end{cases}$$

(a) Bepaal $P(\sum_{i=1}^{10} Y_i = 0)$.

(b) Bepaal $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^n Y_i \leq n)$.

(c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^n Y_i \geq 0)$.