

TENTAMEN WAT IS WISKUNDE B

Donderdag 3 februari 2005

9.00-12.00 uur

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en studentnummer, zet op het eerste vel ook de naam van je docent.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

SUCCES

1. Geef alle $x \in \mathbb{Z}$ die voldoen aan

$$x \equiv 1 \pmod{3}, \quad x \equiv 2 \pmod{5}, \quad x \equiv 4 \pmod{7}.$$

2. Zij $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie die wordt gegeven door $f(x) = x^3$.
 - (a) Bepaal het bereik van f .
 - (b) Is f injectief, surjectief en/of bijjectief? Motiveer je antwoord.
 - (c) Bepaal $f^{-1}([-1, 10])$.
3. Laat $g : X \rightarrow Y$ een functie zijn en $A \subset X$, $B \subset Y$. Bewijs onderstaande beweringen of geef een tegenvoorbeeld.
 - (a) $g(g^{-1}(B)) \subset B$,
 - (b) $g^{-1}(g(A)) \subset A$,
4. (a) Laat $U = \{0, 1\}$ en $V \subset \mathbb{N}$ en laat \mathcal{F} de verzameling van alle functies $f : U \rightarrow V$ zijn.
 - (a) Toon voor $V = \{1, 2, 3\}$ aan dat $|\mathcal{F}| = 9$.
 - (b) Bewijs voor willekeurige V dat \mathcal{F} en $V \times V$ dezelfde kardinaliteit hebben.
 - (c) Als $|V| = n$ met $n \in \mathbb{N}$, wat is dan $|\mathcal{F}|$? Bewijs je bewering.

5. Laat G de deelverzameling van \mathbb{C} zijn die bestaat uit de complexe getallen $1, -1, i, -i$ en laat $*$ de gewone vermenigvuldiging op \mathbb{C} zijn.
- (a) Geef de vermenigvuldig tabel van G voor de operatie $*$.
 - (b) Toon aan dat $(G, *)$ een groep is.
 - (c) Laat $H = \{1, -1\}$, toon aan dat $(H, *)$ een deelgroep is van $(G, *)$
 - (d) Bepaal $[G : H]$, d.w.z. de index van H in G .

6. Laat $(\mathcal{G}, *)$ een eindige groep zijn met eenheids-element e . Zij $x \in G$ en definieer de functie

$$f_x : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad f_x(z) = x * z$$

- (a) Bewijs dat f_x een bijectie is.
- (b) Bepaal f_e .
- (c) Toon aan dat $f_x \circ f_y = f_{x*y}$.
- (d) Bewijs dat als $x * x * x = e$ dat dan $f_x \circ f_x \circ f_x$ de identieke functie op \mathcal{G} is.