Het afleiden van kettingregels voor hogere partiële afgeleiden

Bijlage bij Marsden & Tromba p. 175 Example 5.

De bedoeling van deze bijlage is:

- Een notatie in te voeren waarmee berekeningen als in dit Example gemakkelijker kunnen worden uitgevoerd dan in het boek;
- Een gedeelte af te leiden van een "algemene" kettingregel (waarvan het Example een voorbeeld is), zodat je zelf andere soortgelijke situaties kan aanpakken.

Stel $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is een C^2-functie van twee variabelen (dwz alle tweede-orde partiële afgeleiden bestaan en zijn continu). We noteren

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\dots.$$

Stel er is ook een C^2-afbeelding $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gegeven. We schrijven $\Phi(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$. (Het boek schrijft in plaats van $x(s,t)$ en $y(s,t)$: $g(s,t)$ en $h(s,t)$) We schrijven nu:

$$f_s = \frac{\partial}{\partial s}(f\circ\Phi)(s,t),\ f_t = \frac{\partial}{\partial t}(f\circ\Phi)(s,t),$$

$$f_{ss} = \frac{\partial^2}{\partial s^2}(f\circ\Phi)(s,t),\ f_{st} = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(f\circ\Phi)(s,t),\dots.$$

Het boek schrijft k_{st} in plaats van f_{st}.

Verder schrijven we uiteraard: $x_s = \frac{\partial x}{\partial s}(s,t)$, enz.

Voorbeeld (op college behandeld)

$f(x,y) = \sin(x+2y), x(s,t) = s^2+t^2, y(s,t) = 2st$, dus $\Phi(s,t) = (s^2+t^2, 2st)$. $f_x = \cos(x+2y), f_y = 2\cos(x+2y), x_s = 2s, x_t = 2t, y_s = 2t, y_t = 2s$

$$f_s = \frac{\partial}{\partial s}(f\circ\Phi)(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\sin(s^2+t^2+4st) = (2s+4t)\cos(s^2+t^2+4st).$$

$$f_{ss} = \dots = 2\cos(s^2+t^2+4st) - (2s+4t)^2\sin(s^2+t^2+4st).$$

Enzovoort.

Met de kettingregel (p. 135, first special case) volgt:

$$f_s = f_x\cdot x_s + f_y\cdot y_s$$
$$f_t = f_x\cdot x_t + f_y\cdot y_t.$$

Je kunt zelf nagaan dat dit in het voorbeeld klopt.

Ook f_{ss} kan in het algemeen uitgedrukt worden in de partiële afgeleiden van f, x en y. Dit kunnen we zo afleiden:

$$f_{ss} = (f_s)_s = (f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s)_s$$

(dat is dus $\frac{\partial}{\partial s}$ van de hele functie tussen haakjes.) Dit kun je uitwerken met de productregel voor twee functies $p, q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, schrijf s als de variabele: $(pq)_s = p_s \cdot q + p \cdot q_s$. Je krijgt dan:

$$f_{ss} = (f_x)_s \cdot x_s + f_x \cdot x_{ss} + (f_y)_s \cdot y_s + f_y \cdot y_{ss}$$

Nu moeten we $(f_x)_s$ bepalen. Dit is $\frac{\partial}{\partial s}(f_x \circ \Phi)(s, t)$. We kunnen daarom de kettingregel gebruiken als boven, maar in plaats van f vullen we in f_x

(Opmerking: het boek doet zoiets ook in "Applying the chain rule again" op p. 175 maar zij zijn niet consequent in hun notatie, want op dat moment gaan zij zonder iets te zeggen bijna naar ons systeem over)

$$(f_x)_s = f_{xx} \cdot x_s + f_{xy} \cdot y_s$$
$$(f_y)_s = f_{yx} \cdot x_s + f_{yy} \cdot y_s.$$

Conclusie: (merk op $f_{xy} = f_{yx}$)

$$f_{ss} = (f_{xx} \cdot x_s^2 + 2f_{xy} \cdot x_s \cdot y_s + f_{yy} \cdot y_s^2) + f_x \cdot x_{ss} + f_y \cdot y_{ss}.$$

Verdere vragen (om zelf aan te werken):

- Vind zelf f_{st} en f_{tt}. Ga na dat f_{st} symmetrisch is in s en t.
- Bekijk andere situaties, bijvoorbeeld $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ en $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, schrijf $\Phi(s, t, u) = (x, y, z)$