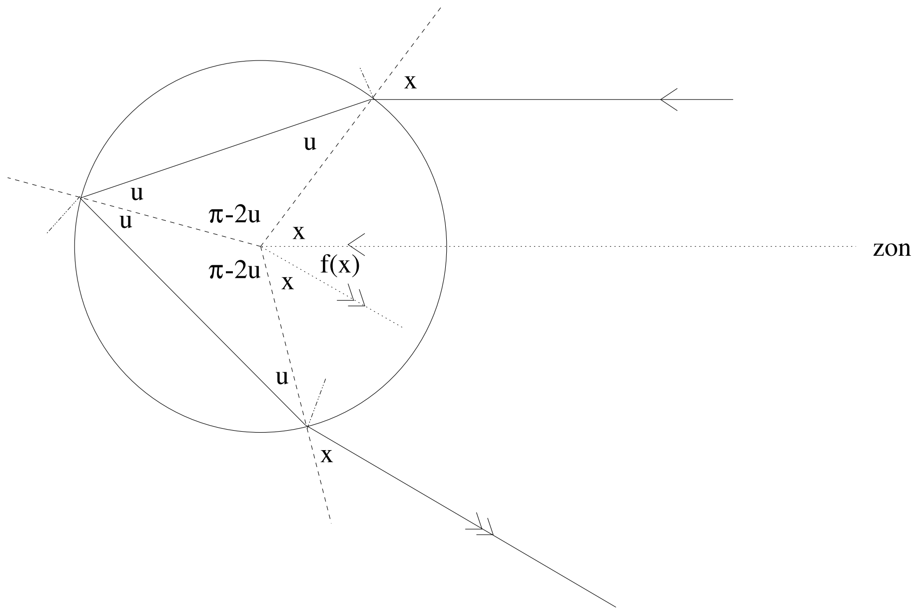
De Regenboog

Een regenboog ontstaat doordat de zonnestralen een wolk van regendruppeltjes treffen. Een waarnemer ziet dan cirkelvormige banden in rood, oranje, geel, groen, blauw. Het middelpunt van deze cirkels ligt altijd in de richting diametraal tegenover de zon. (Dit verklaart waarom je in de winter meer regenbogen ziet dan in de zomer)

Om dit verschijnsel te verklaren bekijken we eerst een regendruppel die we als een bolletje voorstellen. We snijden dit bolletje door een vlak door de as die het middelpunt van dit bolletje met de zon verbindt. In de figuur is de as een stippellijn. (NB: er zijn oneindig veel vlakken door deze as)



Stel een lichtstraal valt in in het vlak van tekening onder een hoek x met de normaal (normalen zijn met streepjeslijnen getekend in de figuur), met $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Een deel van het licht wordt teruggekaatst, de rest wordt gebroken, stel de hoek van uitval is u. Wanneer de rest weer bij het boloppervlak aankomt, is de hoek van inval weer u (waarom?), een gedeelte van deze straal treedt uit de regendruppel, de rest wordt teruggekaatst onder een hoek die weer u is, deze rest ontmoet nu weer het boloppervlak; een deel wordt teruggekaatst (daar kijken we verder niet naar), de rest treedt uit de regendruppel, de hoek van inval is weer u en dus is de hoek van uitval x. Stel deze uitvallende straal maakt een hoek $f(x)$ met de as die de richting van de zon aangeeft.

Volgens de wet van Snellius is $\sin x : \sin u = R$ met R de brekingsindex, dus $u = \arcsin(\frac{\sin x}{R})$. en ook geldt (zie figuur) $x + \pi - 2u + \pi - 2u + x + f(x) = 2\pi$, dus $f(x) = 4u - 2x$, zodat

$$f(x) = 4\arcsin(\frac{\sin x}{R}) - 2x.$$

We zullen zometeen zien dat de grafiek van $y = f(x)$ een maximum M heeft en in de buurt daarvan redelijk plat is. Een heleboel licht wordt dus teruggekaatst volgens een hoek die ongeveer gelijk is aan M.

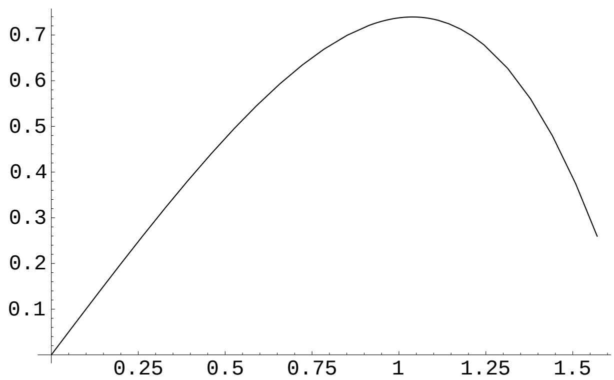
Verklaring van de regenboog: als je een regendruppel van een grote afstand bekijkt, lijkt het alsof de druppel veel van het ingevallen zonlicht terugkaatst via stralen die een hoek M maken met de as zoals hierboven. Al deze stralen liggen op een kegeltje met top de regendruppel en as de lijn van de regendruppel naar de zon. Je moet je nu afvragen uit welke regendruppeltjes zo'n straal precies jouw oog treft. Antwoord: dat zijn de regendruppeltjes die (schijnbaar) op een cirkel op de hemelbol liggen met middelpunt het punt diametraal tegenover de zon, en "straal" de hoek M.

Berekening van M: hiervoor moeten we f differentiëren; met de kettingregel vinden we

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1 - (\frac{\sin x}{R})^2}} \cdot \frac{\cos x}{R} - 2.$$

Enig rekenwerk levert dat $f'(x) = 0$ voor $\cos x = \sqrt{\frac{R^2-1}{3}}$. Voor rood licht hebben we $R = 1,331$, dit levert (in radialen) $x = 1,039$, (in graden) $x = 59,5^o$, $M = f(x) = 42,4^o$. Voor blauw licht $R = 1,343$ en in graden: $x = 58,8^o, M = 40,6^o$. De rode band ligt dus buiten de blauwe.

De verklaring van de regenboog met als model de figuur van een druppeltje met gebroken stralen werd voor het eerst gegeven omstreeks 1305 door de Iraanse wiskundige Kamāl al-Dīn al-Fārisī en de Duitse monnik Dietrich van Freiburg, waarschijnlijk onafhankelijk van elkaar. René Descartes berekende een heleboel waarden van $f(x)$ en vond zo het maximum (1637); Newton vond dit door differentiëren en ontdekte ook dat bij verschillende kleuren licht een verschillende R hoorde (ontdekt in 1672, gepubliceerd in 1704).



De grafiek van $f(x) = 4\arcsin(\frac{\sin x}{R}) - 2x$ *met* x *en* $f(x)$ *in radialen, R=1,331*

Literatuur:

Carl B. Boyer, *The Rainbow: From Myth to Mathematics*, Princeton: Princeton University Press 1987.

Rüdiger Seydel, Roland Bulirsch, *Vom Regenbogen zum Farbfernsehen; Höhere Mathematik in Fallstudien aus Natur und Technik*, New York: Springer-Verlag, 1986.