

Werkcollegequiz 2 Infinitesimaalrekening

Maandag 17 oktober 2005,
15.15-15.45 uur

- Zet je naam op elk blad dat je inlevert. Zet op het eerste vel ook je collegekaartnummer.
- Bij deze quiz vragen we niet alleen de antwoorden in te vullen. Laat de hele berekening zien die tot het antwoord leidt.
- Je mag geen hulpmiddelen gebruiken zoals bijvoorbeeld rekenmachine, formulekaart of eigen aantekeningen.
- Bij het uitrekenen van de limieten mag je de regel van l'Hôpital niet gebruiken.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- *Veel succes.*

1. Bereken $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= [\arcsin(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\pi - \left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\pi\end{aligned}$$

2. Bepaal $\lim_{x \downarrow 1} (x^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \log(x^2 - 1)$.

Substitueer eerst $x^2 = y$ dan nog steeds $\lim_{y \downarrow 1}$ en vervolgens $y - 1 = z$ dan $\lim_{z \downarrow 0}$ en krijgen we een standaardlimiet.

$$\lim_{x \downarrow 1} (x^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \log(x^2 - 1) = \lim_{y \downarrow 1} (y - 1)^{\frac{1}{4}} \log(y - 1) = \lim_{z \downarrow 0} (z)^{\frac{1}{4}} \log(z) = 0.$$

Immers $\lim_{z \downarrow 0} (z)^r \log(z) = 0$ voor elke $r > 0$.

3. Bereken $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$ en leg de stappen in je berekening uit.

We herkennen hier de definitie van de afgeleide van $\arctan x$ in het punt $x = 1$.

We gebruiken dat $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \arctan 1}{x - 1} = \arctan'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Bereken $(1 - i)^{25}$ en schrijf dit in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

We gebruiken modulus en argument van $(1 - i)^{25}$. Merk op $|(1 - i)^{25}| = |1 - i|^{25} = (\sqrt{2})^{25} = 2^{12}\sqrt{2}$ en $\arg(1 - i)^{25} = 25 \arg(1 - i)$ op een veelvoud van 2π na. Nu is $\arg 1 - i = -\frac{\pi}{4}$ en $25 \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{25\pi}{4} = -6\frac{1}{4}\pi$. Dus $\arg(1 - i)^{25} = -\frac{\pi}{4}$ en

$$\begin{aligned} (1 - i)^{25} &= 2^{12}\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2^{12}\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2} \right) \\ &= 2^{12} - 2^{12}i = 4096 - 4096i \end{aligned}$$

5. Geef alle complexe oplossingen van $ix^2 + 2x - 5i = 0$. Schrijf het resultaat weer in de vorm $a + bi$.

Met behulp van de abc-formule krijgen we

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot i \cdot (-5i)}}{2i} = \frac{-2i}{-2i} \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2i} = \frac{4i \mp 8i\sqrt{-1}}{4} = i \mp 2i\sqrt{-1}$$

Nu zijn er twee wortels van -1 , namelijk i en $-i$ als we deze invullen krijgen we twee oplossingen, namelijk

$$x = 2 + i \quad \text{en} \quad -2 + i.$$