# Infinitesimaalrekening 1a

Werkcollegequiz 2

26 september 2002 - 30 minuten

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat je inlevert je naam en je studentnummer in.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Alle onderdelen tellen even zwaar.
- Veel succes!

**Opgave 1** (5)

*Bepaal de hoek tussen de vectoren* $\mathbf{k} - \mathbf{j}$ *en* $3\mathbf{j}$.

Uitwerking: Volgens Theorem 1 in §1.2 van het boek wordt de hoek $\varphi \in [0, \pi]$ tussen de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ vastgelegd door

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \, \cos \varphi.$$

Hier is $\mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{j} = (0, -1, 1)$ met $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ en $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} = (0, 3, 0)$ met $\|\mathbf{b}\| = 3$. Dus

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

en $\varphi = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$.

**Opgave 2** (5)

*Geef de lineaire benadering (ofwel de eerste orde Taylorveelterm) van de functie* sin *in het steunpunt* $\frac{\pi}{3}$.

Uitwerking:
De formule voor lineaire benadering van $f$ in het steunpunt $a$ is

$$f(a) + f'(a)(x - a).$$

Hier wordt dat

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin' \frac{\pi}{3} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\pi}{3} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

**Opgave 3** (5)

*De integralen*

$$I_1 = \int_1^2 \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt \quad \text{en} \quad I_2 = \int_1^4 \frac{e^{-y}}{y\sqrt{y}}\,dy$$

*kun je niet uitrekenen.*
*Laat zien dat* $I_2 = 2I_1$.

Uitwerking:
In de integraal $I_1$ voer ik de substitutie $t^2 = y$ uit. Daarbij gaat de grens $t = 1$ over in $y = 1$, en de grens $t = 2$ in $y = 4$. Voor de differentiaal vind ik $dy = \frac{dt^2}{dt}\,dt = 2t\,dt$, dus $dt = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$. Zo vind ik

$$I_1 = \int_{y=1}^4 \frac{e^{-y}}{y}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{e^{-y}}{y\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}I_2.$$

Dus $I_2 = 2I_1$.