Infinitesimaalrekening

Uitwerking werkcollegequiz Q2

15 oktober 2003 - 30 minuten

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet uw collegekaartnummer op het eerste blad.
- Bij de onderdelen 2–4 vragen we niet alleen antwoorden, maar ook de redenering en/of berekening die tot het antwoord leidt. Bij onderdeel 1 zijn antwoorden voldoende.
- Bij limieten vragen we om geen gebruik te maken van de regel van l'Hôpital.
- Tussen haakjes staat bij elke opgave aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Veel succes!

Opgave 1 (2)
Geef de Taylorreeks van de exponentiële functie in het steunpunt 0.
Voor welke reëele getallen convergeert deze Taylorreeks met de waarde van de exponentiële functie als som?
Uitwerking: Dit zijn feiten om uit het hoofd te kennen: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 2 (3)
Onderzoek $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{e^x - x - 1}$.
Uitwerking: Een beginstukje van de Taylorreeks in opgave 1 levert me de tweede orde Taylorontwikkeling

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + R_2(\exp; x, 0),$$

waarbij de restterm voldoet aan $\lim_{x \to 0} \frac{R_2(\exp;x,0)}{x^2} = 0$. Ik heb orde twee gekozen omdat ik in de teller van de te onderzoeken uitdrukking x^2 zie staan.
Invullen en teller en noemer door x^2 delen levert:

$$\frac{x^2}{e^x - x - 1} = \frac{x^2}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_2(\exp; x, 0) - x - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{R_2(\exp;x,0)}{x^2}},$$

dus

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 0} = 2.$$

Opgave 3 (2)
Geef alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 + z + 1 = 0$.
Uitwerking: Ik pak dit aan met de *abc*-formule, waarbij $a = b = c = 1$. Dus $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$. De oplossingen zijn dus

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Merk op dat ik vermijd $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$ te schrijven. $\sqrt{a}$ is alleen vastgelegd voor $a \geq 0$.

Opgave 4 (3)
Geef de berekening van $\int_0^{\pi/2} t\cos t\,dt$.
Uitwerking: Met partiële integratie:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\cos t\,dt &= t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\cdot\sin t\,dt = \tfrac{\pi}{2}\cdot 1 - 0 - (-\cos t)\Big|_0^{\pi/2}\\ &= \tfrac{\pi}{2} - 0 + (-1) = \tfrac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$