Infinitesimaalrekening

Tweede deeltoets 28 januari 2004 - met uitwerking

9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider: 1) Natasja Davydova, 2) Barbara Boldin, 3) Hil Meijer, 4) Igor Grubisic, 5) Taoufik Bakri, 6) Erik Baurdoux, of meld "niet aan werkcollege deelgenomen".

  Ouderejaars kunnen deze deeltoets laten tellen als onderdeel van het hertentamen Inf1B. Valt u onder deze regeling, meld dat dan ook op het eerste blad.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (10)
Geef de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die voldoet aan* $g''(t) + 2g'(t) = 2g(t)$ *en* $g(0) = g'(0) = 1$.

Uitwerking: Dit is een homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coefficiënten. Laat ik $t \mapsto e^{\lambda t}$ als oplossing proberen: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} = 2e^{\lambda t}$. Dit leidt tot de vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$ met oplossingen $\lambda = -1 + \sqrt{3}$ en $-1 - \sqrt{3}$. Omdat er geen samenvallende oplossingen zijn, weet ik dat $t \mapsto e^{(-1-\sqrt{3})t}$ en $t \mapsto e^{(-1+\sqrt{3})t}$ een basis van de oplossingsruimte vormen.
De gevraagde oplossing kan ik als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} g(t) &= ae^{(-1-\sqrt{3})t} + be^{(-1+\sqrt{3})t}, \\ g'(t) &= a(-1-\sqrt{3})e^{(-1-\sqrt{3})t} + b(-1+\sqrt{3})e^{(-1+\sqrt{3})t} \end{aligned}$$

Invullen van de beginwaarden, en gebruik van $e^0 = 1$ levert een stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 1 &= a + b \\ 1 &= a(-1-\sqrt{3}) + b(-1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Dit kan ik wel met de bij lineaire algebra geleerde veegmethode oplossen, maar dat is voor dit eenvoudige probleem wel zwaar geschut. Uit de eerste vergelijking zie ik $b = 1-a$. Dat invullen in de tweede vergelijking levert: $1 = a(-1-\sqrt{3})+(1-a)(-1+\sqrt{3})$, ofwel $2-\sqrt{3} = -2a\sqrt{3}$. Dus $a = \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$. De gevraagde oplossing is dus

$$g(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)e^{(-1-\sqrt{3})t} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)e^{(-1+\sqrt{3})t}.$$

Opgave 2 (12)
We bekijken de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$, *met beginwaarde* $y(0) = -2$.

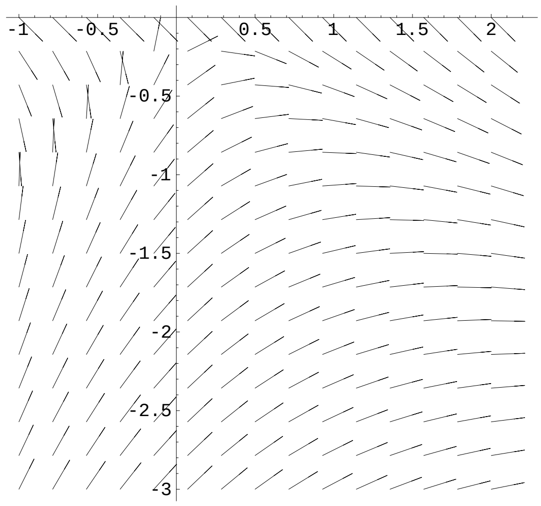
a) *Maak een schets van het lijnelementenveld voor het gebied* $-1 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 0$.

Beredeneer op grond van dit lijnelementenveld dat de oplossing met beginwaarde $y(0) = -2$ *op het interval* $[0, 1]$ *negatief is.*

b) *Los deze differentiaalvergelijking op met de integrerende factor* $y - x$.

Laat zien dat $y(1) = 1 - \sqrt{6}$.

Uitwerking: a) Hier heb ik het voordeel dat ik een lijnelementenveld met Mathematica kan maken:



De verticale lijntjes linksboven zullen wel samenhangen met de nulpunten van $y - x$. Als een oplossing begint in $(0, -2)$ zal deze eerst stijgen, totdat de lijn $x + y = 0$ bereikt wordt, waar het lijnelementenveld horizontaal is. Daarna treedt daling op. Het maximum van de oplossing ligt dus op de lijn $y = -x$, rechts van $x = 0$, dus met $y < 0$. De oplossing door $(0, 2)$ blijft dus negatief.
b) Het lijnelementenveld wordt beschreven door het vectorveld $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \frac{y+x}{y-x}\mathbf{j}$. Loodrecht daarop staat het vectorveld $\mathbf{H} = \frac{y+x}{y-x}\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Gegeven is dat $y - x$ als integrerende factor bruikbaar is. Dus $\mathbf{H}_1 = (y-x)\mathbf{H} = (y+x)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ moet een potentiaal hebben. Zo'n potentiaal zie ik meteen zitten: $V(x, y) = xy + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$.

De oplossingen van de differentiaalvergelijking volgen de niveaukrommen van V, en voldoen dus aan $V(x, y(x)) = c$ waarbij de constante c van de oplossing afhangt. Voor de gegeven beginwaarde vinden we $c = V(0, -2) = -2$. Dus $xy(x) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y(x)^2 = -2$. De oplossing $y(x)$ voldoet aan de vierkantsvergelijking $-\frac{1}{2}y(x)^2 + xy(x) + 2 + \frac{1}{2}x^2 = 0$, met oplossingen $y(x) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(-\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2}x^2)}}{2(-\frac{1}{2})} = x \mp \sqrt{2x^2 + 4}$.
De oplossing met beginwaarde $y(0) = -2$ is negatief voor $x \geq 0$. We moeten dus het minteken voor de wortel hebben:

$$y(x) = x - \sqrt{2x^2 + 4}.$$

Voor $x = 1$ vinden we inderdaad $y(1) = 1 - \sqrt{6}$.

Opgave 3 (7)
Bepaal het gemiddelde van de cosinusfunctie op het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

Uitwerking: Het gemiddelde is $\frac{\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx}{\text{lengte interval}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$.

Opgave 4 (9)
Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ *langs de kromme beschreven door het pad* $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 3$.

Uitwerking: $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{t=0}^{3} \left(t^2, -t\right) \cdot (1, 2t)\ dt = \int_0^3 (-t^2)\, dt = -\frac{1}{3}\ 3^3 = -9$.

Opgave 5 (11)
Bereken $\displaystyle\int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{x} e^{(y-4)^2}\, dy\, dx.$

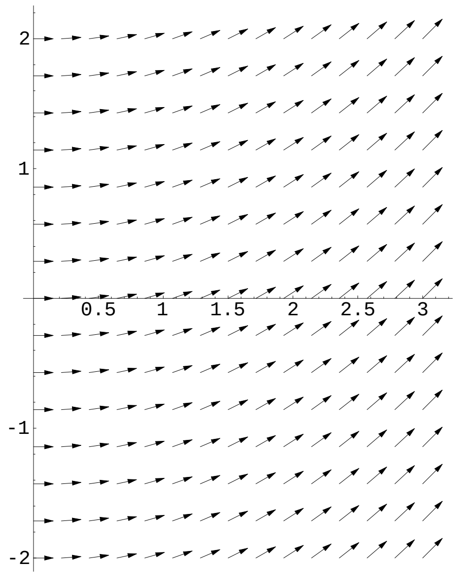
Uitwerking: Met de binnenintegraal kan ik niets, want zulke functies met een kwadraat in de exponent kan ik niet primitiveren.
Daarom verwissel ik de integratievolgorde. Dan kan y van 0 tot 4 lopen, en moet x aan $x \geq y$ en ook aan $x \leq 4$ voldoen. De gevraagde integraal is dus gelijk aan $\int_{y=0}^{4} \int_{x=y}^{4} e^{(y-4)^2}\, dx\, dy$.
Nu kan ik de binnenintegraal tenminste aan: $\int_{x=y}^{4} e^{(y-4)^2}\, dx = -e^{(y-4)^2}(y - 4)$. Door die extra factor $y - 4$ ligt het voor de hand in de buitenintegraal de variabelensubstitutie $u = (y - 4)^2$ te gebruiken. Daarbij is $du = 2(y - 4)\, dy$, en dus $(y - 4)\, dy = \frac{1}{2}\, du$.
De gevraagde integraal is gelijk aan $-\int_{y=0}^{4} e^{(y-4)^2}(y - 4)\, dy = -\int_{u=16}^{0} e^u \frac{1}{2}\, du = -\frac{1}{2}\ e^u\big|_{u=16}^{0} = -\frac{1}{2}\left(1 - e^{16}\right) = \frac{e^{16}-1}{2}$.

Opgave 6 (10)
Bepaal de inhoud van het gebied in $\mathbb{R}^3$ *begrensd door de vlakken* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x + y + z = 3$.

Uitwerking: Het woordje *het* in de opgave is misplaatst: er zijn verschillende begrensde gebieden die door deze vlakken worden begrensd. Elke keus hebben we goed gerekend. In deze uitwerking ga ik uit van het gebied G bepaald door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y \leq 1$ en $x + y + z \leq 3$.
Ik bepaal de inhoud door de constante functie 1 te integreren over dit driedimensionale gebied, dat ik G noem.

Als ik alleen naar de voorwaarden aan x en y kijk, dan zie ik dat (x, y) door de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(0, 1)$ loopt. Voor elk van deze punten kan z lopen van 0 tot $3 - x - y$ (≥ 2).
De inhoud is dus $\int_G 1\,dV = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{3-x-y} dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}(3 - x - y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\left((3 - x)(1 - x) - \frac{1}{2}(1 - x)^2\right) dx = 3x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}(1 - x)^3\Big|_{x=0}^{1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.

Opgave 7 (9)
Hieronder staat een plaatje van een vectorveld $\mathbf{v}$.



a) *Stel een formule voor* $\mathbf{v}$ *op die goed bij het plaatje past. Leg uit hoe u tot uw formule komt.*

b) *Bereken* $\operatorname{div}\mathbf{v}$ *voor uw beschrijving van* $\mathbf{v}$.

c) *Bereken* $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ *voor uw beschrijving van* $\mathbf{v}$.

Uitwerking: a) Ik zie dat $\mathbf{v}$ een richting heeft die alleen van de horizontale coördinaat x afhangt, toenemend van helling 0 voor $x = 0$ tot ongeveer helling 1 bij $x = 3$. Verder lijkt de horizontale component constant te zijn. Laat ik die constante gelijk aan 1 nemen. (Over het algemeen neemt men bij het tekenen van vectorvelden de schaal voor de lengte van de pijltjes anders dan de schaal langs de assen. Wegens die conventie heb ik de vrijheid de constante zo eenvoudig mogelijk te kiezen.) Dan krijg ik $\mathbf{v} = \mathbf{i} + ax\mathbf{j}$. Door de constante a gelijk aan $\frac{1}{3}$ te nemen krijg ik helling 1 voor $x = 3$. Dus

$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{i} + \frac{x}{3}\mathbf{j}.$$

Natuurlijk kan ik dit in de tekening niet onderscheiden van $\mathbf{i} + \left(\frac{33x}{101}\right)^{1.1}\mathbf{j}$ en van $\frac{1}{10}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\left(\frac{33x}{101}\right)^{1.1}\mathbf{j}$; maar waarom zou ik het mezelf moeilijker maken dan nodig?
b) $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial x/3}{\partial y} = 0$.

c) $\mathbf{rot\,v} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial x/3}{\partial x} - \frac{\partial 1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \frac{1}{3}\,\mathbf{k}$.

Opgave 8 (10)
Geef een potentiaal van de onderstaande vectorvelden of beredeneer dat er geen potentiaal bestaat.

$$\begin{array}{ll} a) & \mathbf{i} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathbf{j} \\ b) & y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ c) & yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k} \end{array}$$

Uitwerking: a) $\mathbf{rot}\left(\mathbf{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathbf{j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathbf{k} \neq \mathbf{o}$, dus geen potentiaal.
b) $\mathbf{rot}\ (y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$. Het loont naar een potentiaal V te zoeken.
Uit $\frac{\partial V}{\partial x} = y$ concludeer ik dat $V(x, y, z) = xy + f(y, z)$. Hierbij hangt f dus niet van x af; eventueel wel van y en z,
Uit $x \overset{\text{eis}}{=} \frac{\partial V}{\partial y} = x + \frac{\partial f}{\partial y}$ concludeer ik dat $f = f(z)$ alleen van z afhangt.
Tenslotte $1 \overset{\text{eis}}{=} \frac{\partial V}{\partial z} = 0 + \frac{\partial f}{\partial z}$. Dus ik kan $f(z) = z + 28$ nemen.
Een potentiaal is $V(x, y, z) = xy + z + 28$.
c) $\mathbf{rot}\ (yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}) = (-x - x)\mathbf{i} + *\mathbf{j} + *\mathbf{k} \neq \mathbf{o}$. Dus in geval c) is er geen potentiaal.

Opgave 9 (11)
Bereken $\displaystyle\int_K e^{x^2+y^2}\,dA$ *waarbij* $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \le 0,\ y \le 0,\ x^2 + y^2 \le 4\right\}$.
Uitwerking: Na overgang op poolcoördinaten wordt K beschreven door $0 \le r \le 2$ en $\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$. Dus $\int_K e^{x^2+y^2}\,dA = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=\pi}^{3\pi/2} e^{r^2}\,r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_{r=0}^{2} = \frac{\pi}{4}\left(e^4 - 1\right)$.

Opgave 10 (11)
Waar ligt het zwaartepunt van het gebied in het vlak beschreven door $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$*? (Ga uit van een constante massadichtheid.)*
Uitwerking: Ik noem het gebied G. De oppervlakte (voor massadichtheid 1) is opp $= \int_G dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}$.
De coördinaten van het zwaartepunt zijn de gemiddelden van de coördinaatfuncties. Ik bereken daarom $I_x = \int_G x\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}$ en $I_y = \int_G y\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} y\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}x^4\,dx = \frac{1}{10}$.
Het zwaartepunt is $\left(\frac{I_x}{\text{opp}}, \frac{I_y}{\text{opp}}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{10}\right)$.