Infinitesimaalrekening

Eerste deeltoets 12 november 2003

9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider: 1) Natasja Davydova, 2) Ettay Weiss, 3) Hil Meijer, 4) Igor Grubisic, 5) Taoufik Bakri, 6) Erik Baurdoux, of meld "niet aan werkcollege deelgenomen".

  Ouderejaars kunnen deze deeltoets laten tellen als hertentamen Inf1A. Valt u onder deze regeling, meld dat dan ook op het eerste blad.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (15)
Het puntenaantal dat u voor werkcollegequiz Q1 behaald hebt vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) Schrijf zo eenvoudig mogelijk: $\frac{1+p(1-2p)}{p-1}$.

ii) Geef drie verschillende waarden van φ die voldoen aan $\tan^2 \varphi = 1$.

iii) Onderzoek $\lim_{u\to\infty} u^{-1/3} \log u$.

Opgave 2 (15)
Het puntenaantal dat u voor werkcollegequiz Q2 behaald hebt vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) De functies f en g op $\mathbb{R}$ worden gegeven door $f(x) = x^2 \sin x$ en $g(x) = f^{(1200)}(x)$.

   Bepaal $g(0)$.

ii) Bepaal alle complexe oplossingen van de vergelijking $z^4 = 2z^2 + 15$.

Opgave 3 (10)

i) Schrijf $-1 + i\sqrt{3}$ in de vorm $re^{i\varphi}$ met $r \geq 0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$.

ii) Wat is de som van de volgende reeks: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!}$.

Opgave 4 (9)
De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $f(x, y) = y \sin(xy)$.
Bepaal $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Opgave 5 (9)
Onderzoek de integraal $\displaystyle\int_{-1}^{0} u\sqrt{1 - u^2}\, du$.

Opgave 6 (9)
Onderzoek met de stelling van Taylor: $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{5t}{\log(t + 1)}$.

Opgave 7 (9)
Geef de bolcoördinaten van het punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Opgave 8 (12)
We onderzoeken de kromme in het vlak die in poolcoördinaten gegeven wordt door $r = 2 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Maak een schets van deze kromme.

b) Beschrijf deze kromme in rechthoekige coördinaten door een pad van de vorm $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

c) Stel een integraal op die de lengte van deze kromme weergeeft. (Deze integraal behoeft u niet te berekenen.)

Opgave 9 (12)
Van de differentieerbare functies a, b, f en $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven:

$$\begin{aligned} a(0,0) &= 1, & a(1,0) &= 2, \\ \frac{\partial a}{\partial x}(0,0) &= 1, & \frac{\partial a}{\partial x}(1,0) &= 0, \\ \frac{\partial a}{\partial y}(0,0) &= 0, & \frac{\partial a}{\partial y}(1,0) &= -1, \\ b(x,y) &= x^3 + y^4, & f(x,y) &= 5x^2 + 2y, \\ h(x,y) &= f(a(x,y), b(x,y)). \end{aligned}$$

Bepaal $\mathbf{grad}\, h(0, 0)$.