

Infinitesimaalrekening

Herkansing 25 februari 2004

9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (6)

Schrijf zo eenvoudig mogelijk:

$$\log(6 + \sqrt{33}) + \log(6 - \sqrt{33}).$$

Opgave 2 (6)

Schets en beschrijf de grafiek van $\sinh$ op het interval $[-1, 1]$. Let bij de beschrijving op nulpunten, tekenverloop, monotonie en symmetrie.

Opgave 3 (8)

We bekijken de functie $f : (0, 3) \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x - \text{entier}(x)$.

- Laat zien dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in \text{dom}(f)$.
- Laat zien dat f niet monotoon stijgend is.

Opgave 4 (8)

Onderzoek $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1+u-e^u}{u^2}$.

(Het is niet de bedoeling hier de zogenaamde regel van l'Hôpital te gebruiken.)

Opgave 5 (9)

Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(1, 0, 1)$ van de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x + 2y^2 + z^3$ in de richting $(1, 1, 1)$.

Z.O.Z.

Opgave 6 (9)

Bepaal het imaginaire deel van $\frac{7+i}{5-i}$ en van $(1-i)^{60}$.

Opgave 7 (9)

Geef de functie $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan $y'(t) - y(t) = 2$ en $y(0) = 1$.

Opgave 8 (9)

We bekijken het vectorveld $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ op $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Het pad $\mathbf{c}$ wordt gegeven door $\mathbf{c}(t) = (2+t)\mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} - \cos t \mathbf{k}$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

Beschrijf het pad $\mathbf{c}$ een stroomlijn van $\mathbf{A}$?

Opgave 9 (9)

Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathbf{c}} (\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s}$ voor het pad gegeven door $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Opgave 10 (10)

Bereken $\int_D \frac{1}{2+x^2} dA$, waarbij D de driehoek in $\mathbb{R}^2$ is met hoekpunten $(0, 0)$, $(3, 0)$ en $(3, 3)$.

Opgave 11 (6)

Is de functie $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ harmonisch?

Opgave 12 (11)

Bepaal de inhoud van het gebied in $\mathbb{R}^3$ gegeven door $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.