Infinitesimaalrekening

Herkansing 25 februari 2004

9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (6)
Schrijf zo eenvoudig mogelijk:

$$\log\left(6+\sqrt{33}\right)+\log\left(6-\sqrt{33}\right).$$

Opgave 2 (6)
Schets en beschrijf de grafiek van sinh op het interval $[-1,1]$. Let bij de beschrijving op nulpunten, tekenverloop, monotonie en symmetrie.

Opgave 3 (8)
We bekijken de functie $f:(0,3)\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R}$ gegeven door $f(x)=x-\text{entier}(x)$.

a) Laat zien dat $f'(x)>0$ voor alle $x\in\text{dom}(f)$.

b) Laat zien dat f niet monotoon stijgend is.

Opgave 4 (8)
Onderzoek $\lim_{u\to 0}\frac{1+u-e^u}{u^2}$.
(Het is niet de bedoeling hier de zogenaamde regel van l'Hôpital te gebruiken.)

Opgave 5 (9)
Bereken de richtingsafgeleide in het punt $(1,0,1)$ van de functie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y,z)=x+2y^2+z^3$ in de richting $(1,1,1)$.

Z.O.Z.

Opgave 6 (9)
Bepaal het imaginaire deel van $\frac{7+i}{5-i}$ en van $(1-i)^{60}$.

Opgave 7 (9)
Geef de functie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan $y'(t) - y(t) = 2$ en $y(0) = 1$.

Opgave 8 (9)
We bekijken het vectorveld $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ op $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0\right\}$. Het pad $\mathbf{c}$ wordt gegeven door $\mathbf{c}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} - \cos t\,\mathbf{k}$, $t \in [\pi, 2\pi]$.
Beschrijft het pad $\mathbf{c}$ een stroomlijn van $\mathbf{A}$?

Opgave 9 (9)
Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathbf{c}} (\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s}$ voor het pad gegeven door $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Opgave 10 (10)
Bereken $\displaystyle\int_D \frac{1}{2 + x^2}\, dA$, waarbij D de driehoek in $\mathbb{R}^2$ is met hoekpunten $(0, 0)$, $(3, 0)$ en $(3, 3)$.

Opgave 11 (6)
Is de functie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ harmonisch?

Opgave 12 (11)
Bepaal de inhoud van het gebied in $\mathbb{R}^3$ gegeven door $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.