

Infinitesimaalrekening

Werkcollegequiz Q2

18 oktober 2004 - 16:30–17:00

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet uw collegekaartnummer op het eerste blad.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele berekening zien.
- Bij limieten vragen we om geen gebruik te maken van de regel van l'Hôpital.
- Tussen haakjes staat bij elke opgave aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Geen hulpmiddelen zoals dictaat, rekenapparaat, formulekaart, eigen aantekeningen, ...
- Veel succes!

Opgave 1. (2 punten) Bereken $\binom{7}{3}$.

$$\dots = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Opgave 2. (3 punten) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $\frac{5-i}{2+i}$.

Ik kies voor directe berekening van het quotiënt. (Gebruik van absolute waarde en argument lijkt me meer werk te gaan kosten.) $\frac{5-i}{2+i} = \frac{(5-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{9-7i}{5}$. Het reële deel is dus $\frac{9}{5}$ en het imaginaire $-\frac{7}{5}$.

Opgave 3. (3 punten) Bereken $\int_1^2 (u^2 + u) du$.

Berekening met behulp van een primitieve: $\dots = \left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{14}{3} - \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$.

Opgave 4. (3 punten) Laat zien dat $\frac{d}{dt} \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

De logaritme is differentieerbaar, en $\log' : x \mapsto \frac{1}{x}$. Met de kettingregel vind ik: $\dots = \log'(t + \sqrt{t^2 + 1}) \frac{d}{dt}(t + \sqrt{t^2 + 1}) = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \left(1 + \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + 1}}\right) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{(t + \sqrt{t^2 + 1})\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

Opgave 5. (4 punten) Bepaal $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}{x - \frac{1}{2}}$, en licht de stappen van uw berekening toe.

Ik bedenken dat $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, en herschrijf de limiet als $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \arcsin \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}$. Hier staat de definitie van afgeleide. Omdat $\arcsin$ een differentieerbare functie is, is de limiet gelijk aan $\arcsin' \frac{1}{2}$. Ik gebruik dat $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ om verder te gaan: $\arcsin' \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.