Infinitesimaalrekening

Werkcollegequiz Q2

18 oktober 2004 - 16:30–17:00

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet uw collegekaartnummer op het eerste blad.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele berekening zien.
- Bij limieten vragen we om geen gebruik te maken van de regel van l'Hôpital.
- Tussen haakjes staat bij elke opgave aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Geen hulpmiddelen zoals dictaat, rekenapparaat, formulekaart, eigen aantekeningen, ...
- Veel succes!

Opgave 1. (2 punten) Bereken $\binom{7}{3}$.

$\cdots = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 5\cdot7 = 35.$

Opgave 2. (3 punten) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $\frac{5-i}{2+i}$.

Ik kies voor directe berekening van het quotiënt. (Gebruik van absolute waarde en argument lijkt me meer werk te gaan kosten.) $\frac{5-i}{2+i} = \frac{(5-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{9-7i}{5}$. *Het reële deel is dus* $\frac{9}{5}$ *en het imaginaire* $-\frac{7}{5}$.

Opgave 3. (3 punten) Bereken $\displaystyle\int_1^2 (u^2+u)\,du$.

Berekening met behulp van een primitieve: $\cdots = \left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{3} - \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$.

Opgave 4. (3 punten) Laat zien dat $\displaystyle\frac{d}{dt}\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

De logaritme is differentieerbaar, en $\log' : x \mapsto \frac{1}{x}$. *Met de kettingregel vind ik:* $\cdots = \log'\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\frac{d}{dt}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) = \frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right) = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{(t+\sqrt{t^2+1})\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

Opgave 5. (4 punten) Bepaal $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}{x-\frac{1}{2}}$, en licht de stappen van uw berekening toe.

Ik bedenk dat $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, *en herschrijf de limiet als* $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \arcsin\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$. *Hier staat de definitie van afgeleide. Omdat* arcsin *een differentieerbare functie is, is de limiet gelijk aan* $\arcsin'\frac{1}{2}$. *Ik gebruik dat* $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ *om verder te gaan:* $\arcsin'\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.