Infinitesimaalrekening

Eerste deeltoets 9 november 2004; 15.00 – 18.00 uur

uitwerking

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider.

  Groepnummers en namen werkcollegebegeleiders: 1 Martin Bootsma, 2 Oliver Lorscheid, 3 Benno van den Berg, 4 Hil Meijer, 5 Pieter Eendebak, 6 Rogier Swierstra, 7 Sergei Anisov, 8 Arthur van Dam.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (15)
Het puntenaantal dat u voor werkcollegequiz Q1 behaald hebt, wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) Bereken: $\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{j}$.

ii) Geef de exacte waarde: $\arctan \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

iii) Laat zien dat $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1 + 2x - \text{entier}(2x)}$ *een periodieke functie is. Wat is de kleinste periode?*

Z.O.Z.

Uitwerking: i) $\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{30+20+15+12}{60} = \frac{77}{60}$.
ii) Ik gebruik eerst dat tan, en dus ook arctan, oneven functies zijn: $\arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vervolgens gebruik ik $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Dus $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Omdat arctan verkregen wordt door tan op $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ te inverteren, concludeer ik $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Dus $\arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$.
iii) Ik noem de functie h. Als x toeneemt, neemt entier$(2x)$ met 1 toe zodra $2x$ een geheel getal passeert. Dat treedt op voor $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Als x met $\frac{1}{2}$ toeneemt, dan neemt $2x$ ook met 1 toe. Dus $x \mapsto 2x + \text{entier}(2x)$ is onveranderd als x door $x + \frac{1}{2}$ vervangen wordt. Dus $h(x + 1/2) = h(x)$: h is een periodieke functie met periode $\frac{1}{2}$.
Bij toenamen tussen twee halftallige waarden van x in is entier$(2x)$ constant en neemt $2x$ strikt monotoon toe. Dus $\frac{1}{2}$ is de kleinste periode van p.

Opgave 2 (15)
Het puntenaantal dat u voor werkcollegequiz Q2 behaald hebt, wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) Onderzoek de volgende limiet: $\lim_{u \uparrow 0} \dfrac{1}{\cos(\text{entier}(u))}$.

ii) Bereken: $\int_0^2 \left|1 - \sqrt{u}\right| \, du$.

iii) Bepaal het reële en imaginaire deel van $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+i}}$.

Uitwerking: i) Voor $-1 \leq u < 0$ is entier$(u) = -1$, en dus $\frac{1}{\cos \text{entier}(u)} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos 1}$. Daarom is $\lim_{u \uparrow 0} \frac{1}{\cos \text{entier}(u)} = \frac{1}{\cos 1}$.
ii) Er geldt $1 - \sqrt{u} \geq 0$ voor $0 \leq u \leq 1$, en $1 - \sqrt{u} \leq 0$ voor $1 \leq u \leq 2$. Dus $\int_0^2 \left|1 - \sqrt{u}\right| \, du = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{u}\right) du + \int_1^2 \left(\sqrt{u} - 1\right) du = \left(u - \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{2}{3}u^{3/2} - u\right)\Big|_1^2 = 1 - \frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{3}2\sqrt{2} - 2 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3}$.
iii) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Dus $\frac{1}{1+\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{i}{2}}{(\frac{3}{2}-\frac{i}{2})(\frac{3}{2}+\frac{i}{2})} = \frac{32+\frac{i}{2}}{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{5} + \frac{i}{5}$.

Opgave 3 (9)
We bekijken de functie $[3, 5] \to \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt{y - 2}$.
Is deze functie strikt monotoon? Wat is de beeldverzameling? Is deze functie injectief, surjectief, bijectief?
Uitwerking: De afgeleide is $\frac{1}{2\sqrt{y-2}}$ is positief voor $y \in [3, 5]$. Dus deze functie is strikt monotoon stijgend.
De beeldverzameling is $\left[\sqrt{3-2}, \sqrt{5-2}\right] = \left[1, \sqrt{3}\right]$.
Omdat de beeldverzameling niet gelijk is aan $\mathbb{R}$, is deze functie $[3, 5] \to \mathbb{R}$ niet surjectief, en dus ook niet bijectief.
Zoals alle strikt monotone functies, is deze functie injectief.

Opgave 4 (9)
Welke van de volgende functies zijn continu op hun domein?

a) entier : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) $[0, \infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t+1}$.

c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : a \mapsto \begin{cases} a - 7 & \text{als } a > 1, \\ -6a & \text{als } a \leq 1. \end{cases}$

Vergeet niet uw beweringen te beargumenteren.

Uitwerking: a) Omdat $\lim_{x \uparrow 0} \text{entier} x = -1$ en $\lim_{x \downarrow 0} \text{entier} x = 0$, bestaat $\lim_{x \to 0} \text{entier} x$ niet, en is deze functie niet continu.
b) De veeltermfunctie $t \mapsto t + 1$ is continu op $[0, \infty)$. Omdat de functie op $[0, \infty)$ geen nulpunten heeft, is $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ ook continu.
c) De veeltermfunctie $a \mapsto a - 7$ is continu op $(1, \infty)$. De veeltermfunctie $a \mapsto -6a$ is continu op $(-\infty, 1)$. De functie $c : a \mapsto \begin{cases} a - 7 & \text{als } a > 1, \\ -6a & \text{als } a \leq 1. \end{cases}$ is dus continu op $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Onderzoek in $a = 1$:
$\lim_{a \uparrow 1} c(a) = \lim_{a \uparrow 1} -6a = -6$,
$\lim_{a \downarrow 1} c(a) = \lim_{a \downarrow 1} a - 7 = -6$.
Dus $\lim_{a \to 1} c(a) = -6 = c(1)$. Dus ook in 1 is c continu.
Conclusie c is continu.

Opgave 5 (9)
Geef een primitieve van $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \dfrac{y}{9 + y^2}$.

Uitwerking: Ik gebruik de variabelensubstitutie $y^2 = t$, dus $2y\,dy = dt$, ofwel $y\,dy = \frac{1}{2}\,dt$. Zo vind ik $\int \frac{y}{9+y^2}\,dy = \int \frac{1}{9+t}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\log(9 + t) = \frac{1}{2}\log\left(9 + y^2\right)$.

Opgave 6 (10)
Onderzoek $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cosh x}$ *met behulp van de stelling van Taylor.*
Uitwerking: De tweede orde Taylorontwikkeling van cosh in het steunpunt 0 is

$$\begin{aligned} \cosh x &= \cosh 0 + x \cosh' 0 + \frac{1}{2}x^2 \cosh'' 0 + R_2(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + R_2(x), \end{aligned}$$

waarbij de restterm $R_2(x) = R_2(\cosh; x, 0)$ voldoet aan $\lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$. Dus $\frac{x^2}{1-\cosh x} = \frac{x^2}{1-1-\frac{1}{2}x^2-R_2(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{R_2(x)}{x^2}}$. De gevraagde limiet bestaat dus en voldoet aan $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cosh x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}-0} = -2$.

Opgave 7 (10)

Bepaal de som: $\displaystyle\sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m\,5^m}$.

Uitwerking: Dit doet denken aan de Taylorreeks van de logaritme in het steunpunt 1:

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{voor } 0 < x \leq 2.$$

Als ik $x = 1 - \frac{1}{5}$ neem, wordt dit $\log \frac{4}{5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n5^n}$. Op een minteken na en wat begintermen hebben we hiermee de te onderzoeken reeks.

$$-\log \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 25} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n}.$$

De som van de reeks is dus $-\log \frac{4}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{50} = \log 5 - 2\log 2 - \frac{11}{50}$.

Opgave 8 (7)

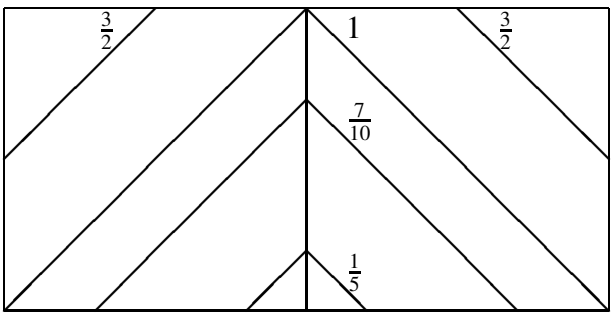
Schrijf $\sqrt{2} - i\sqrt{6}$ *in de vorm* $re^{i\varphi}$ *met* $r \geq 0$ *en* $\varphi \in \mathbb{R}$.

Uitwerking: In de poolvoorstelling is $r\left|\sqrt{2} - i\sqrt{6}\right| = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2}$. Voor φ kan ik het argument nemen: $\varphi = \arg\left(\sqrt{2} - i\sqrt{6}\right) = \arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Dus $\sqrt{2} - i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

Opgave 9 (8)

Teken minstens vier niveaulijnen van de functie $[-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto |x| + y$.

Uitwerking: Een niveaulijn voor niveau c wordt beschreven door $|x| + y = c$, ofwel $y = c - |x|$. Ik kies de waarden van c zo dat er binnen het gebied $[-1,1] \times [0,1]$ wat te zien is: $c \in \{1, \frac{7}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\}$.



Opgave 10 (8)

Geef de bolcoördinaten van het punt in $\mathbb{R}^3$ *met rechthoekige coördinaten* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Uitwerking: We hebben $x = y = 1$, $z = \sqrt{6}$. Dus de afstand tot de oorsprong is $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 1 + 6} = 2\sqrt{2}$.
De projectie op het xy-vlak is $(1, 1)$, met poolcoördinaten $r = \sqrt{2}$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$. (Controle: $r\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 = x$, net zo voor y.) Nu weet ik dat $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Verder is $\sqrt{6} = \rho\cos\varphi = 2\sqrt{2}\cos\varphi$, dus $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Omdat φ in het interval $[0, \pi]$ moet liggen, concludeer ik dat $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.
Zo heb ik de bolcoördinaten gevonden: $\rho = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.