Infinitesimaalrekening

Tweede deeltoets 1 februari 2005

uitwerking

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider.

  Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders:
  1 Martin Bootsma, 2 Oliver Lorscheid, 3 Benno van den Berg, 4 Hil Meijer,
  5 Pieter Eendebak, 6 Rogier Swierstra, 7 Sergei Anisov, 8 Arthur van Dam.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (11)
Geef de differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan:

$$(1+t)\,\frac{df}{dt} = 2f \quad \textit{en} \quad f(0) = f(-2) = 1.$$

Uitwerking: Dit is een eerste orde lineaire homogene differentiaalvergelijking. Om de stelling over dit type differentiaalvergelijkingen toe te passen deel ik door $1 + t$. Daarmee beperk ik me dus vooralsnog tot $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\frac{df}{dt} - \frac{2}{1+t} f = 0.$$

De stelling zegt dat alle oplossingen veelvouden zijn van $e^{-A(t)}$, waarbij $A(t) = \int \frac{-2}{1+t}\,dt = -2\log|1+t|$. Zo vind ik

$$f(t) = \begin{cases} c_1 e^{2\log(1+t)} & \text{op } (-1,\infty) \\ c_2 e^{2\log|1+t|} & \text{op } (-\infty,-1) \end{cases} = \begin{cases} c_1(1+t)^2 & \text{op } (-1,\infty) \\ c_2(1+t)^2 & \text{op } (-\infty,-1) \end{cases}$$

Omdat $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ uit twee intervallen bestaat moet ik met twee eventueel verschillende constanten werken.

Z.O.Z.

Door $f(0) = 1$ in te vullen, zie ik dat $c_1 = 1$. Analoog vind ik dat $c_2 = 1$ uit $f(-2) = 1$. Dus nu heb ik gevonden

$$f(t) = (1+t)^2 \qquad \text{op } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Maar deze functie is differentieerbaar op $\mathbb{R}$. Invullen in de differentiaalvergelijking geeft voor het linkerlid $(1+t)\frac{d}{dt}(1+t)^2 = 2(1+t)^2$, en voor het rechterlid $2(1+t)^2$. Dus deze functie voldoet ook in $t = 0$ aan de differentiaalvergelijking.
Nu moet ik ook nog nagaan dat het *de* oplossing is, dat wil zeggen dat er niet meer zijn. Op $(-1, \infty)$ en op $(-\infty, -1)$ volgt dat uit de geciteerde stelling. Dus op $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ is $t \mapsto (1+t)^2$ de enige oplossing. Als ik probeer in $t = 0$ een andere functiewaarde te nemen krijg ik een niet-continue functie, die dus niet aan de eis *differentieerbaar* voldoet.

Opgave 2 (6)
Bereken de eerste orde partiële afgeleiden van de functie $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gegeven door* $q(u, v) = ue^{u^2+v^2}$.
Uitwerking: $\frac{\partial q}{\partial u}(u, v) = \left(1 + 2u^2\right) e^{u^2+v^2}$ en $\frac{\partial q}{\partial v}(u, v) = 2uve^{u^2+v^2}$.

Opgave 3 (8)
Geef een parametervoorstelling van de raaklijn aan het pad

$$\mathbf{c}(t) = \left(6t, 3t^2, t^3\right)$$

in het punt $\mathbf{c}(t_0)$.

Uitwerking: Een parametervoorstelling is $\mathbf{c}(t_0) + \lambda \mathbf{c}'(t_0)$, waarbij λ door $\mathbb{R}$ loopt. Dat levert dus $\left(6t_0, 3t_0^2, t_0^3\right) + \lambda \left(6, 6t_0, 3t_0^2\right)$.

Opgave 4 (8)
Geef een eenheidsnormaal op het oppervlak $xy^3 + y - z = -2$ *in het punt* $(0, 1, 3)$.

Uitwerking: Een normaal wordt gegeven door de gradiënt
$\mathbf{grad}\left(xy^3 + y - z\right)\Big|_{(x,y,z)=(0,1,3)} = \left(y^3, 3xy^2 + 1, -1\right)\Big|_{(x,y,z)=(0,1,3)} = (1, 1, -1)$. De lengte van deze normaalvector is $\|(1, 1, -1)\| = \sqrt{3}$. Deling door deze lengte levert een eenheidsnormaal: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Opgave 5 (10)
Bereken de booglengte van het pad $\mathbf{c}(t) = \left(\sin 3t, \cos 3t, 2t^{3/2}\right)$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

Uitwerking: $\int_{\mathbf{c}} ds = \int_{\pi/2}^{\pi} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(3\cos 3t)^2 + (-3\sin 3t)^2 + (3t^{1/2})^2}\, dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{9 + 9t}\, dt = \sqrt{9}\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\left((1+\pi)^{3/2} - (1+\pi/2)^{3/2}\right)$.

Opgave 6 (6)
Bepaal de divergentie van het vectorveld $xyz\,\mathbf{i} + \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{j}$.

Uitwerking: $\operatorname{div}\left(xyz\,\mathbf{i} + \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{j}\right) = \frac{\partial}{\partial x}xyz + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}0 = yz - 2y$.

Opgave 7 (9)

Geef een potentiaal van het volgende vectorveld, of beredeneer dat dit vectorveld geen potentiaal heeft:

$$(e^x \cos y + z)\,\mathbf{i} - e^x \sin y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}.$$

Uitwerking: Laat ik eerst maar even de rotatie berekenen:

$$\mathbf{rot}\,((e^x \cos y + z)\,\mathbf{i} - e^x \sin y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^x \cos y + z \\ -e^x \sin y \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 1 \\ -e^x \sin y - e^x(-\sin y) \end{pmatrix} = \mathbf{o}.$$

Het loont dus om naar een potentiaal V te zoeken.
Er moet gelden $\frac{\partial V}{\partial x} = e^x \cos y + z$. Dus $V(x, y, z) = e^x \cos y + zx + f(y, z)$ voor één of andere functie f die niet van x afhangt.
Invullen in $\frac{\partial V}{\partial y} = -e^x \sin y$ levert $-e^x \sin y + 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = -e^x \sin y$, ofwel $\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = 0$, ofwel $f(y, z) = f(z)$, alleen afhankelijk van z.
Invullen in $\frac{\partial V}{\partial z} = x$ levert $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0$, dus f is constant. Ik kies de constante waarde 8, en vind daarmee de potentiaal $V(x, y, z) = e^x \cos y + zx + 8$.

Opgave 8 (11)
Bereken de inhoud van het gebied in $\mathbb{R}^3$ *gegeven door* $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le xy$.

Uitwerking: De inhoud bepaal ik door 1 over dit gebied te integreren:
$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2} \int_{z=0}^{xy} dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2} xy\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} 2x\,dx = 1.$
Het kan ook door het gebied te zien als ingesloten tussen de grafiek van $[0, 1]\times[0, 2] \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$. De inhoud is dan $\int_{[0,1]\times[0,2]} xy\,dA = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2} xy\,dy\,dx$. Daarna gaat het verder zoals in de eerste aanpak.

Opgave 9 (11)
Bereken $\displaystyle\int_{y=0}^{6} \int_{x=y/3}^{2} \int_{z=0}^{x} e^{x^3}\,dz\,dx\,dy.$

Uitwerking: De binnenintegraal levert $\int_{z=0}^{x} e^{x^3}\,dz = xe^{x^3}$.
Nu heb ik over: $\int_{y=0}^{6} \int_{x=y/3}^{2} xe^{x^3}\,dx\,dy$.
De integraal over x ziet er ondoenlijk uit. Daarom verwissel ik de integratievolgorde:
$\int_{y=0}^{6} \int_{x=y/3}^{2} \cdots = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{3x} \cdots$.
De zo ontstane integraal heeft in de binnenintegratie: $\int_{y=0}^{3x} xe^{x^3}\,dy = 3x^2 e^{x^3}$.
Nu heb ik over $\int_{x=0}^{2} 3x^2 e^{x^3}\,dx$. Bij variabelensubstitutie $x^3 = v$ geldt $dv = 3x^2\,dx$. De integraal is dus gelijk aan $\int_{v=0}^{8} e^v\,dv = e^8 - 1$.

Opgave 10 (9)
De ellips $E \subset \mathbb{R}^3$ *wordt gegeven door de twee vergelijkingen*

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \textit{en} \quad x + y + z = 1.$$

Beschrijf deze ellips E door twee vergelijkingen in cylindercoördinaten.

Uitwerking: De eerste vergelijking komt neer op $r = \sqrt{5}$. Voor de tweede vergelijking vind ik $r(\cos\theta + \sin\theta) + z = 1$.

Opgave 11 (11)
Waar ligt het zwaartepunt van de kromme in $\mathbb{R}^3$ geparametriseerd door

$$\mathbf{c}(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t\right), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Ga uit van een uniforme massaverdeling.

Uitwerking: De kromme is een stuk van een spiraal op de cylinder $x^2 + y^2 = 1$. In een schets zie ik dat er symmetrie is om het punt $\mathbf{c}(\pi/2) = (0, 1, \pi/4)$ in de x- en in de z-richting. Ik verwacht daarom dat $x_{\text{zw}} = 0$ en $z_{\text{zw}} = \frac{\pi}{4}$.
Voor alle zekerheid reken ik alle vier hier relevante integralen uit. Ik noem de kromme k.
$I_1 = \int_k ds = \int_0^\pi \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{1/2} dt = \frac{\sqrt{5}\pi}{2}$.
$I_2 = \int_k x\,ds = \int_0^\pi \cos t\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \cos t\frac{\sqrt{5}}{2}\,dt = 0$.
$I_3 = \int_k y\,ds = \int_0^\pi \sin t\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = -\cos t\frac{\sqrt{5}}{2}\Big|_0^\pi = \sqrt{5}$.
$I_4 = \int_k z\,ds = \int_0^\pi \frac{t}{2}\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \frac{1}{4}t^2\frac{\sqrt{5}}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\sqrt{5}\pi^2}{8}$.
Het zwaartepunt is $(x_{\text{zw}}, y_{\text{zw}}, z_{\text{zw}}) = \left(\frac{I_2}{I_1}, \frac{I_3}{I_1}, \frac{I_4}{I_1}\right) = \left(0, \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{4}\right)$, in overeenstemming met wat ik over de x- en z-coördinaat dacht op grond van symmetrie-overwegingen.